

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Bernhard Keller², and Alain Soyeur³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Professeur, Université Paris Diderot, Paris

³Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égale à la partie entière de $1 + \log n$.

Solution : Supposons que l'écriture de n en base 10 compte $m + 1$ chiffres $a_m, \dots, a_0 \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ avec $a_m \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}$. On a alors : $n = \sum_{k=0}^m a_k 10^k$ et

$$\begin{aligned} \log n &= \log \left(\sum_{k=0}^m a_k 10^k \right) \\ &= \frac{\ln 10^m (a_m + a_{m-1} 10^{-1} + \dots + a_0 10^{-m})}{\ln 10} \\ &= m + \frac{\ln (a_m + a_{m-1} 10^{-1} + \dots + a_0 10^{-m})}{\ln 10} \end{aligned}$$

Mais $1 \leq a_m + a_{m-1} 10^{-1} + \dots + a_0 10^{-m} \leq 10$ et

$$0 \leq \frac{\ln (a_m + a_{m-1} 10^{-1} + \dots + a_0 10^{-m})}{\ln 10} < 1.$$

Donc $\boxed{E(1 + \log n) = m + 1}$ et le résultat est prouvé.

Références