Accélération de la convergence vers la contante d'Euler

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Accélération de la convergence vers la contante d'Euler***

[1], mai 1993.
La constante d'Euler γ est traditionellement définie par la limite

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} U_n := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n)\right) := \lim_{n\to\infty} U_n.$$

1. *Montrer que* $\quad \dfrac{1}{2(n+1)} < U_n - \gamma < \dfrac{1}{2n},\ n\in\mathbb{N}.$
2. *Si on modifie légèrement la suite $(U_n)_n$ en la remplacant par la suite $(V_n)_n$ où*

$$V_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

nous allons vérifier que la convergence est notablement accélérée, plus précisément nous avons

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < V_n - \gamma < \frac{1}{24n^2},\ n\in\mathbb{N}.$$

Pour cela, soit $f(x) = -(x+1)^{-1} - log(x+\frac{1}{2}) + log(x+\frac{3}{2})$.

- ⇝ *Vérifier que $V_n - V_{n+1} = f(n),\ n\in\mathbb{N}$.*
- ⇝ *Montrer que $-f'(x) < \frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})^{-4}$. En déduire que*

$$f(k) \leq \frac{1}{12}(k+\frac{1}{2})^{-3} < \int_k^{k+1} t^{-3}\frac{dt}{12}$$

et montrer l'inégalité de droite.

- ⇝ *Faire de même à gauche et conclure.*

Solution :

1.

2. *Comme*

$$f'(x) = -\frac{1}{4(x+1)^2(x+1/2)(x+3/2)}, \quad x \in \mathbb{R}_+^\star$$

on a

$$-f'(x) < \frac{1}{4(x+1/2)^4}, \quad x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

De là, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ *assure que pour tout* $k \in \mathbb{N}^\star$

$$f(k) = -\int_k^\infty f'(x)dx < \frac{1}{4}\int_k^\infty (x+1/2)^{-4}dx = \frac{1}{12(k+1/2)^3}.$$

Maintenant, en remarquant que $(k+1/2)^2 = k^2+k+1/4 > k(k+1)$ *on peut écrire*

$$\frac{1}{(k+1/2)^3} < \frac{1}{(k+1/2)k^2(k+1)^2} < \frac{1}{2}\cdot\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \int_k^{k+1} x^{-3}dx,$$

(cette inégalité peut être suggérée par par la figure ci-contre) soit

$$f(k) < \frac{1}{12}\int_k^{k+1} x^{-3}dx, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^\star.$$

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.