Autour des ! universelles des fonctions continues

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Autour des ! universelles des fonctions continues***

[1], [2]-2007/4.

Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$. On dira que $c > 0$ est une corde pour f s'il existe un nombre réel x tel que x et $x + c$ soient tous deux les dans $[0,1]$ et vérifient $f(x + c) = f(x)$. On dira que c est une corde universelle s'il est une corde pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. *Montrer que les réels $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$ sont des cordes universelles.*
2. *Soit $0 < c < 1$ qui ne soit pas l'inverse d'un entier. Construire une fonction $g \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et $g(x+c) = g(x)$, $x \in [0, 1-c]$. En considérant $f(x) := g(x)-x$, montrer que c n'est pas une corde universelle.*
3. *(Application) Un marcheur parcourt (continuement) 40 kilomètres en deux heures. Montrer qu'il existe une période d'une heure où il parcourt 20 kilomètres exactement.*
4. *On suppose que*
$$f(x + 3/10) \neq f(x), \quad \forall\, x \in [0, 7/10].$$
Montrer que f s'annule au moins 7 fois sur $[0,1]$.

Solution :

1. *Pour une telle fonction et $n \in \mathbb{N}^\star$, écrivons*
$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{0}{n}\right)\right) + \left(f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \cdots + \left(f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) = 0.$$
Si l'une des n parenthèses s'annule, $1/n$ est une corde de f. Sinon, considérons la fonction $d(x) := f(x + 1/n) - f(x)$, elle est continue sur $[0, 1 - 1/n]$ et la formule précédente s'écrit
$$d(0) + d(1/n) + \cdots + d(n - 1/n) = 0.$$
Comme les réels $d(0), d(1/n), \ldots, d((n-1)/n)$ sont non nuls mais de somme nulle, deux d'entre-eux au moins sont de signe contraire et par continuité de d le théorème des valeurs intermédiaires assure que d s'annule sur l'intervalle d'extrémités ces deux valeurs. il existe donc $x \in [0, 1 - 1/n]$ tel que $d(x) = 0$ i.e. $f(x) = f(x + 1/n)$: $1/n$ est bien une corde pour f.

2. *Supposons maintenant que c ne soit pas l'inverse d'un entier, comme dans la question précédente on commence par construire une fonction g continue sur $[0,1]$ telle que*

$$g(0)=0,\ g(1)=1 \quad \textit{et} \quad g(x)=g(x+c),\ x\in[0,1-c].$$

Il est possible de s'assurer de l'existence d'une telle fonction en dessinant son graphe mais il est aussi possible de donner une formule explicite de l'une d'entre-elles :

$$g(x)=\frac{\sin\left(\dfrac{2\pi x}{c}\right)}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{c}\right)}.$$

Considérons alors

$$f(x):=x-g(x),\quad x\in[0,1].$$

f est continue sur $[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$ mais c ne peut être une corde pour f : en effet, s'il existe $x\in[0,1-c]$ tel que $f(x)=f(x+c)$ alors

$$f(x+c)-f(x)=(x+c-g(x+c))-(x-g(x))=c>0,$$

et c n'est pas une corde universelle.

3.
4. *Pour $x\in[0,7/10]$ l'application continue $x\mapsto f(x+3/10)-f(x)$ ne s'annule pas ; elle garde donc un signe constant que l'on peut supposer strictement positif. On a donc $f(x+3/10)>f(x),\ \forall x\in[0,3/10]$. En particulier $f(9/10)>f(6/10)>f(3/10)>f(0)=0$ et $0=f(1)>f(7/10)>f(4/10)>f(1/10)$. Ainsi, sur chacun des intervalles $]1/10,3/10[,]3/10,4/10[,]4/10,6/10[,]6/10,7/10[,]7/10,9/10[$ f change de signe, donc, d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires s'annule. Comme $f(0)=f(1)=0$ elle admet au moins sept zéros sur $[0,1]$.*

Références

[1] P.R. Halmos. Problems for Mathematicians Young and Old, volume 12 of Dolciani Mathematical Expositions. MAA, 1991. Il existe maintenant également une vertion française « Problèmes pour mathématiciens, petits et grands » aux éditions Cassini (2000).

[2] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.