Une inégalité...

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une inégalité...***

[1]
Soient $x_1 \geq x_2 \geq \ldots, x_n \geq 0$ *tels que*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 400 \quad et \quad \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq 10^3,$$

montrer que

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 10.$$

Solution : *Si* $x_1 \geq 100$ *il n'y a rien à démontrer, supposons donc* $x_1 \leq 100$. *On peut alors écrire*

$$\begin{aligned} 10^3 &\leq x_1^2 + \sum_{j=2}^{n} x_j^2 \leq x_1^2 + x_2 \sum_{j=2}^{n} x_j \\ &\leq x_1^2 + x_2(400 - x_1) = x_1(x_1 - x_2) + 400x_2 \\ &\leq 100(x_1 - x_2) + 400x_2 = 100x_1 + 300x_2 \end{aligned}$$

soit

$$10 \leq x_1 + 3x_2.$$

Maintenant

$$(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} \geq x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_2 x_2} = x_1 + 3x_2 \geq 10,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@ ? ? ? ? ?.fr.