Différentiabilité de $M_n(\mathbb{R}) \ni M \mapsto (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \dots, \mathrm{tr}(M^n))$ et applications

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Différentiabilité de*** $M_n(\mathbb{R}) \ni M \mapsto (\boldsymbol{tr}(M), \boldsymbol{tr}(M^2), \dots, \boldsymbol{tr}(M^n))$ ***et applications***

[1]-2006.

1. *Montrer que l'application* $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ *définie par*

$$f(M) = (tr(M), tr(M^2), \dots, tr(M^n)), \quad M \in M_n(\mathbb{R}^n)$$

   est différentiable et calculer $df(M)(H)$.

2. *Soit* $M \in M_n(\mathbb{R})$. *montrer que le rang de* $df(M)$ *est égal au degré du polynôme minimal de* M.
3. *En déduire que l'ensemble des matrices de* $M_n(\mathbb{R})$ *dont le polynôme caractéristique coïncide avec le polynôme minimal est un ouvert de* $M_n(\mathbb{R})$.

Solution :

1. *On a pour* $k \in \mathbb{N}^\star$

$$tr(M+H)^k = tr(M^k) + \sum_{i=0}^{k-1} tr(M^i H M^{k-1-i}) + O(\|H\|^2),$$

   et l'identité $tr(AB) = tr(BA)$ *entraine alors*

$$tr(M+H)^k = tr(M^k) + k\,tr(M^{k-1}H) + O(\|H\|^2).$$

   Les fonctions composantes de f *sont donc différentiables, il en va donc de même pour* f *et*

$$df(M)(H) = (tr(H), 2tr(MH), \dots, ntr(M^{n-1}H)).$$

2. *Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, désignons par Φ_X la forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi_X(H) = tr(XH)$. L'application $X \mapsto \Phi_X$ réalise un isomorphisme entre $M_n(\mathbb{R})$ et son dual $M_n(\mathbb{R})^\star$. Ainsi les formes $(\Phi_{M^k})_0^{n-1}$ forment une famille de rang égal à celui des matrices $(M^k)_0^{n-1}$ lui même égal à d le degré du polynôme minimal de M. Par conséquent,* $\dim \ker df(M) = n^2 - d$, *donc* $\mathrm{rg} df(M) = d$.

3. *Le polynôme minimal divisant toujours le polynôme caractéristique, l'ensemble $\mathscr{C}$ des matrices dont les polynôme minimal et caractéristique coïncident est formé des matrices pour lesquelles le polynôme minimalest de degré n. Soit $M \in \mathscr{C}$, on sait donc que $\mathrm{rg} df(M) = n$ et comme $df(M)$ est continue, il existe[1] un voisinage de M dans $M_n(\mathbb{R})$ sur lequel $\mathrm{rg} df \geq n$. Par conséquent $\mathscr{C}$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.*

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.