Autour du théorème de Gauss-Lucas

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Autour du théorème de Gauss-Lucas***

[1]

1. *Montrer que pour tout polynôme* $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d \in \mathbb{C}[z]$*, les racines du polynôme dérivée* P' *sont dans l'enveloppe convexe des racines de* P *(théorème de Gauss-Lucas).*
2. ***(l'inégalité arithmético-géométrique complexe)*** *Soient* n *nombres complexes* $z_1, \dots, z_n$ *tels qu'il existe* $\psi \in [0, \pi/2[$ *vérifiant*
$$z_j = \rho_j e^{i\theta_j}, \quad 0 \le |\theta_j| < \psi < \pi/2, \quad \forall\, 1 \le j \le n.$$
(voir la figure) Montrer que
$$\cos(\psi)|z_1 \dots z_n|^{1/n} \le \frac{|z_1 + z_2 + \dots + z_n|}{n}.$$
3. *Soit* H *l'enveloppe convexe des zéros de* $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d \in \mathbb{C}[z]$, $(d \ge 1)$. *Montrer que*
$$\left|\frac{a_d}{P(z)}\right|^{1/d} \le \frac{1}{d\cos(\varphi)}\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|, \quad \forall\, z \notin H,$$
(c'est l'inégalité de Wilf) où φ *est la moitié de l'angle « de vision » de* H *du point* z *(voir la figure ci-dessous). Retrouver le théorème de Gauss-Lucas.*

Solution :

1. *Soient* $r_1, \dots, r_n$ *les racines deux à deux distinctes de* P *de multiplicités respectives* $m_1, \dots, m_n$ *de telle sorte que* $P(z) = (z - r_1)^{m_1} \dots (z - r_n)^{m_n}$ *; aprés un calcul classique*
$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{m_1}{z - r_1} + \dots + \frac{m_n}{z - r_n}.$$
Un zéro de P' *qui est aussi un zéro de* P *est trivialement dans* H*, considérons donc* z_0 *un zéro de* P' *qui n'est pas un zéro de* P *; l'égalité précédente s'écrit*
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m_1}{z_0 - r_1} + \dots + \frac{m_n}{z_0 - r_n} \\ &= \frac{m_1(\overline{z_0} - \overline{r_1})}{|z_0 - r_1|^2} + \dots + \frac{m_n(\overline{z_0} - \overline{r_n})}{|z_0 - r_n|^2} \\ &= \lambda_1(\overline{z_0} - \overline{r_1}) + \dots + \lambda_n(\overline{z_0} - \overline{r_n}), \end{aligned}$$

où $\lambda_k := m_K/|\overline{z_0} - \overline{r_k}|^2 \in \mathbb{R}_+$. La dernière égalité peut alors aussi s'écrire

$$z_0 = \frac{\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_n r_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n},$$

qui assure que z_0 est combinaison convexe des racines de P.

2. *Nous avons*

$$\begin{aligned}|z_1 + \cdots + z_n| &\geq |Re(z_1 + \cdots + z_n)| \\ &= |z_1|\cos(\theta_1) + \cdots + |z_n|\cos(\theta_n) \\ &\geq (|z_1| + \cdots + |z_n|)\cos(\psi) \\ &\geq n(|z_1|\ldots|z_n|)^{1/n}\cos(\psi)\end{aligned}$$

où l'on a successivement utilisé la décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi/2]$ et l'inégalité arithmético-géométrique[1] sur les réels positifs $|z_j|,\ j = 1, \ldots, n$.

3. *Soient $r_1, \ldots, r_d$ les racines de P comptées cette fois-ci avec leur multiplicité et $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe en dehors de l'enveloppe convexe H des zéros de P. Sous forme polaire nous avons $z - r_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ soit*

$$\frac{1}{z - r_j} = \rho_j^{-1} e^{i\theta_j}, \quad 1 \leq j \leq d,$$

où $\theta_j \leq 2\psi,\ (1 \leq j \leq n)$. L'inégalité arithmético-géométrique complexe implique (bien remarquer que H fermé convexe et $z \notin H$ impliquent $\psi \in [0, \pi/2[$...)

$$\cos(\psi)\left|\frac{1}{z - r_j}\cdots\frac{1}{z - r_n}\right|^{1/n} \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z - r_j}\right|$$

qui peut aussi s'écrire

$$\left|\frac{a_n}{P(z)}\right|^{1/n} \leq \frac{1}{n\cos(\psi)}\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|, \quad \forall\, z \notin H.$$

S'il existe un zéro de P' qui ne soit pas dans H, il n'est donc pas une racine de P et par l'inégalité de Wilf

$$0 < \left|\frac{a_n}{P(z)}\right|^{1/n} \leq \frac{1}{n\cos(\psi)}\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right| = 0,$$

ce qui est absurde, le théorème de Gauss-Lucas suit.

Références

[1] J.M. Steele. The Cauchy-Schwarz Master Class. MAA Problem Books Series. M.A.A.& Cambridge University Press, 2004.