# Autour d'une ellipse

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

***Exercice 0.1*** ★ ***Autour d'une ellipse***

*Problem of the week, spring 2006.*

*Dans une ellipse $\mathscr{E}$ d'aire 1, on considère deux cordes parallèles respectivement aux deux axes de $\mathscr{E}$. Ces deux cordes divisent l'ellipse en quatre régions, montrer qu'au moins deux regions ont une aire inférieure ou égale à 1/4.*

***Solution :***

*Sans perdre de généralité, supposons que les deux cordes se coupent dans le premier cadran (fermé) ; si on rajoute les deux axes de $\mathscr{E}$ et les deux cordes symétriques déduites des deux premières par une symétrie de centre $O$ le centre de $\mathscr{E}$ on obtient 16 régions dont les aires sont désignées par les lettres $A, B, C, D$ (voir la figure, certaines bien entendu, pouvant être d'aire nulle si une corde est confondu avec un axe). Il déja clair que $B \leq 1/4$, nous allons montrer que la somme des aires des deux régions grisées est inférieure ou égale à $1/2$. En effet, elle vaut $(B + 2C) + (B + 2D)$ et comme $4(A + B + C + D) = \text{Aire}(\mathscr{E}) = 1$ on aura*

$$(B+2C)+(B+2D) = 2(B+C+D) = \frac{1}{2}(1-4A) \leq \frac{1}{4}.$$

*Ainsi, une des deux quantités $B+2C$, $B+2D$ est inférieure à $1/4$ ce qui achève la démonstration (les deux domaines seront $(B)$ et $(B, C, C, B)$ ou $(B, D, D, B)$).*

## Références