La courbe d'équation $y = x^4 + 9x^3 + \alpha x^2 + 9x + 4$
admet-elle 4 points alignés ?

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ **La courbe d'équation $y = x^4 + 9x^3 + \alpha x^2 + 9x + 4$ admet-elle 4 points alignés ?**

[1].

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de α la courbe

$$y = x^4 + 9x^3 + \alpha x^2 + 9x + 4 (C_\alpha)$$

admet-elle 4 points alignés ?

Solution : ($\Rightarrow$) Fixons nous $\alpha \in \mathbb{R}$ et une droite $(D_{a,b})$ d'équation $y = ax + b$. Le point (x, y) appartient à $(C_\alpha) \cap (D_{a,b})$ si, et seulement si

$$f_{a,b}(x) := x^4 + 9x^3 + \alpha x^2 + (9 - a)x + 4 - b = 0.$$

Il s'agit donc de déterminer une condition sur α pour que la fonction $f_{a,b}$ admette 4 racines réelles distinctes. Si tel est le cas, le théorème de Rolle assure que $f'_{a,b}$ admet 3 racines réelles distinctes et de même $f''_{a,b}$ admet 2 racines réelles distinctes. Mais $f''_{a,b}(x) = 12x^2 + 54x + 2\alpha$, son discriminant $\Delta = 54^2 - 96\alpha$ doit être strictement négatif, i.e. $\alpha < 243/8$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si $\alpha < 243/8$ et montrons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}$ admette 4 racines réelles distinctes.

$\alpha < 243/8$ assure que le discriminant de $f''_{a,b}(x) = 12x^2 + 54x + 2\alpha$ est strictement négatif, $f''_{a,b}$ admet donc deux racines réelles $z_1 < z_2$ et nécessairement

$f'_{a,b}$ est strictement croissante sur $] -\infty, z_1]$

$f'_{a,b}$ est strictement décroissante sur $[z_1, z_2]$

$f'_{a,b}$ est strictement croissante sur $[z_2, +\infty[$.

En particulier $f'_{a,b}(z_1) > f'_{a,b}(z_2)$ et la constante a n'apparaissant que dans le terme constant de $f'_{a,b}$, il est donc possible de choisir convenablement a de telle sorte (faites un dessin) que

$$f'_{a,b}(z_1) > 0 \quad \text{et} \quad f'_{a,b}(z_2) < 0.$$

De plus, comme $\lim_{+\infty} f'_{a,b} = +\infty$, $\lim_{-\infty} f'_{a,b} = -\infty$ la fonction $f'_{a,b}$ admet forcément trois racines réelles distinctes $y_1 < y_2 < y_3$ et

$f_{a,b}$ est strictement décroissante sur $] -\infty, y_1]$,

$f_{a,b}$ est strictement croissante sur $[y_1, y_2]$,

$f_{a,b}$ est strictement décroissante sur $[y_2, y_3[$,

$f_{a,b}$ est strictement décroissante sur $[y_3, +\infty[$.

On va maintenant jouer sur b qui n'apparaît que dans le coefficient constant de $f_{a,b}$ sous la forme $4 - b$: en d'autres termes, augmenter b revient à translater le graphe de $f_{a,b}$ suivant la direction de l'axe des ordonnées. comme $f_{a,b}(y_2) > f_{a,b}(y_1) > f_{a,b}(y_3)$ il suffit de choisir correctement $b \in \mathbb{R}$ pour que $f_{a,b}(y_2) > 0$, $f_{a,b}(y_1) < 0$, $f_{a,b}(y_3) < 0$.

Références

- [1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, <http://www.rms-math.com/>.