Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Bernhard Keller[2], and Alain Soyeur[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Professeur, Université Paris Diderot, Paris
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un entier $n > 1$. On considère l'équation

$$x^{x^n} = n$$

1. *Montrer qu'il existe une unique solution à cette équation.*
2. *Déterminer cette unique solution.*

Solution :

1. *Étudions à n fixé la fonction définie par*

$$f(x) = x^{x^n} - n = e^{x^n \ln x}$$

Elle est définie sur $]0, +\infty[$, dérivable sur cet intervalle et $\forall x \in I$,

$$f'(x) = x^{n-1} e^{x^n \ln x} [n \ln x + 1]$$

La dérivée s'annule en un seul point $x_0 = e^{-1/n} < 1$. On en déduit en écrivant le tableau de variations de f que f présente un minimum en x_0 avec $f(x_0) = e^{-1/(en)} - n$. Par conséquent, puisque $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+ \to 1]{} -n < n$, et que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty \to +]{} \infty$, la fonction ne s'annule qu'une fois en un point $x_1 > x_0$.

2. *Puisque $f(n^{1/n}) = 0$, en en déduit que la seule solution de l'équation vaut $n^{1/n}$.*

Références