Combinatoire : les nombres de Bell

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

1er février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Combinatoire : les nombres de Bell***

[1]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on désigne par B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[1, \dots, n]$ avec par convention $B_0 = 1$.

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:* $\quad B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.
2. *Montrer que le rayon de convergence R de la série génératrice exponentielle $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ de la suite $(B_n)_0^\infty$ est strictement positif et calculer $f(z)$ pour $|z| < R$.*
3. *Montrer que* $\quad B_n = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Solution :

1. *Associons à tout entier $0 \leq k \leq n$, l'ensemble E_k des partitions de $[1, 2, \dots, n+1]$ telles que la partie de $[1, 2, \dots, n+1]$ contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Le cardinal de E_k vaut $C_n^k E_{n-k}$ (car une telle partition est déterminée par les k éléments restant pour compléter la partie de $[1, 2, \dots, n+1]$ contenant $n+1$ (soit C_n^k possibilités, à laquelle on peut adjoindre les B_{n-k} partitions de l'ensemble à $n-k$ éléments restant). Comme $E_0, E_1, \dots, E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[1, 2, \dots, n+1]$, on a bien*

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} = B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k.$$

2. *Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $B_n \leq n!$. Comme $B_0 = B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5$, la propriété est vérifiée pour $n \leq 3$. Supposons là vérifiée jusqu'au rang n, alors*

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \leq n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)!.$$

On a donc $\dfrac{B_n}{n!} \leq 1$ et le rayon de convergence R de la série entière $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ est supérieur ou égal à 1.

On va utiliser la formule démontrée dans la première question pour calculer $f(z)$. Pour $z \in]-R, R[$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1},$$

donc

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \right) z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n \end{aligned}$$

On reconnait alors dans le dernier terme le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = f(z)$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ de rayon de convergence strictement positif : on a donc

$$f'(z) = f(z) e^z, \qquad \forall\, z \in]-R, R[.$$

En intègrant cette équation différentielle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) = Ce^{e^z}$ sur $]-R, R[$; enfin, comme $f(0) = B_0 = 1$, $C = e^{-1}$ et finalement

$$f(z) = e^{e^z - 1}, \qquad \forall\, z \in]-R, R[.$$

3. *Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ étant infini, on a*

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!} \right), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

La série double $\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} u_{n,k}$ (où $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!k!}$) est sommable[1] ; il est donc légitime d'échanger l'ordre de sommation

$$f(z) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} \right) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{n=0} \frac{n^k}{n!} \right) z^n, \quad z \in]-R, R[,$$

soit par unicité des coefficients

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}.$$

Q.E.D.

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : algèbre 1. Cassini, 2001.