

# Combinatoire : les nombres de Bell

Patrice Lassère<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, Université Paul Sabatier, Toulouse

1<sup>er</sup> février 2023

## Exercice 0.1 ★ Combinatoire : les nombres de Bell

[1]

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $B_n$  le nombre de partitions de l'ensemble  $[1, \dots, n]$  avec par convention  $B_0 = 1$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k$ .
2. Montrer que le rayon de convergence  $R$  de la série génératrice exponentielle  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$  de la suite  $(B_k)_{k \geq 0}$  est strictement positif et calculer  $f(z)$  pour  $|z| < R$ .
3. Montrer que  $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ .

## Références

- [1] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : algèbre 1. Cassini, 2001.