Quelques applications de l'inégalité de Jensen

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

5 février 2023

Exercice 0.1 ★ **Quelques applications de l'inégalité de Jensen**

[1]

1. *Montrer que pour tout $x > 1$*

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{3}{x}.(\star)$$

En déduire une nouvelle démonstration de la divergence de la série harmonique.

2. *Démontrer que parmi tous les polygones convexes inscrits dans un cercle, ce sont les polygones réguliers qui possèdent une aire maximale.*

Solution :

1. *La stricte convexité de l'application $f : x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ implique avec*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}, \quad x_1 = x-1, x_2 = x,\ x_3 = x+1$$

que

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$$

soit

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3(x+1)},$$

$(\star)$ est bien démontrée [1].

Pour l'application, supposons que la série harmonique converge, alors avec $(\star)$

$$H := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \cdots < 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{9} + \cdots = 1 + H$$

contradiction et la série harmonique est bien divergente.

2. *Comme on le voit sur la figure tout tel polygône peut être considère comme un aggloмérat de triangles isocèles admettant tous l'origine comme un des sommets et dont la réunion des*

aires est celle du polygône. L'aire achurée du triangle sur la figure vaut $\frac{1}{2}\sin(\theta_1)$ et si on désigne par $\theta_1, \ldots, \theta_N$ les angles correspondants, l'aire du polygône sera

$$A = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \sin(\theta_j), \quad 0 < \theta_j < \pi, \quad \sum_{j=1}^{N} \theta_j = 2\pi.$$

Par concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi]$ nous avons avec Jensen

$$A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_j) \leq \frac{n}{2} \sin\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_j)\right) = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Par stricte concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi]$, le cas d'égalité dans la formule de Jensen assure qu'il y aura égalité dans la formule précédente si, et seulement si $\theta_j = \frac{2\pi}{n}$, configuration qui correspond bien au cas d'un polygône régulier.

Références

[1] J.M. Steele. The Cauchy-Schwarz Master Class. MAA Problem Books Series. M.A.A.& Cambridge University Press, 2004.