Études de quelques équations fonctionnelles

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

23 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Études de quelques équations fonctionnelles***

[1]

1. *Déterminer les solutions continues à l'origine (voire bornée sur un voisinage de l'origine) de l'équation fonctionnelle*

$$2f(2x) = f(x) + x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.(\star)$$

2. *Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}_+^\star$ tendant vers zéro en $+\infty$ et solutions de l'équation fonctionnelle*

$$f(xf(y)) = yf(x), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^\star.(\star)$$

Solution :

1. *Supposons que le problème $(\star)$ admette une solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il est équivalent d'écrire*

$$f(x) = 2^{-1} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

De là, aprés une récurrence élémentaire on en déduit que pour tous $x \in \mathbb{R},\ , n \in \mathbb{N}^\star$

$$f(x) = 2^{-n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{2^2} + \frac{x}{2^4} + \cdots + \frac{x}{2^{2(n-1)}} + \frac{x}{2^{2n}}$$

soit encore

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{-n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{2^2} + \frac{x}{2^4} + \cdots + \frac{x}{2^{2(n-1)}} + \frac{x}{2^{2n}}, \\ &= \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{4} \frac{1-2^{-2n}}{1-2^2} \\ &= \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x(1-2^{-2n})}{3}. \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on peut donc passer à la limite sur n

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x(1-2^{-2n})}{3} \right)$$

mais comme f est continue à l'origine $2^{-n}f(x2^{-n})$ tends vers zéro avec n, donc

$$f(x) = 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{x(1-2^{-2n})}{3} = \frac{x}{3}.$$

On trouve donc $f(x) = x/3$, et réciproquement, il est élémentaire de vérifier que c'est bien une solution : c'est l'unique solution continue à l'origine de l'équation fonctionnelle ($\star$).

2. Pour $y = x$ l'équation fonctionnelle donne $f(xf(x)) = xf(x)$ et donc $xf(x)$ est un point fixe (non nul) de f pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Notons $a = xf(x)$ un tel point fixe. Nous avons

Références

[1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Sequences and Series, volume 1 of Student Mathe- matical Library. AMS, 2001.