Étude des espaces $\mathrm{vect}\{f^{(k)},\ k\in\mathbb{N}\}$ et $\mathrm{vect}\{x\mapsto f(x+a),\ a\in\mathbb{R}\}$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Étude des espaces*** $\mathrm{vect}\{f^{(k)},\ k\in\mathbb{N}\}$ ***et*** $\mathrm{vect}\{x\mapsto f(x+a),\ a\in\mathbb{R}\}$

Pour $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *on définit*

$$\mathscr{T}_f := \mathrm{Vect}\{x\mapsto f_a(x)=f(x-a),\ a\in\mathbb{R}\},$$

et pour $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$$\mathscr{D}_f := \mathrm{Vect}\{x\mapsto f^{(k)}(x),\ k\in\mathbb{N}\}.$$

1. *Caractériser les applications* $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *vérifiant* $\dim\mathscr{D}_f<\infty$.
2. *Soient* $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\},\ f\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$. *On suppose* $\dim\mathscr{T}_f=d<\infty$, *montrer qu'il existe* $a_1,\dots,a_d\in\mathbb{R}$ *et* $\varphi_1,\dots,\varphi_d\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *telles que*

$$\forall\, a\in\mathbb{R},\quad f_a=\sum_{j=1}^d \varphi_j(a) f_{a_j}.$$

3. *Plus précisément, si* $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *vérifiant* $\dim\mathscr{T}_f=d<\infty$, *montrer que les applications* $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ *sont* $\mathscr{C}^\infty$.
4. *En déduire que* $f\in\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$.
5. *Établir l'équivalence*

$$(\dim\mathscr{T}_f=d<\infty)\iff(\dim\mathscr{D}_f=d<\infty)\iff\left(f(t)=\sum_{j=1}^d P_j(t)e^{\lambda_j t}\right).$$

Solution :

1. *Il n'est pas difficile de démontrer que* $\mathscr{D}_f$ *est de dimension finie si, et seulement si, il existe une suite* $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ *de nombres complexes tels que*

$$f^{(d)}+\lambda_d f^{(d-1)}+\dots+\lambda_1 f=0.$$

f est donc solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont la structure des solutions est parfaitement connue ([?], [?])

$$f(t)=\sum_{j=1}^{d}P_j(t)e^{\lambda_j t},\ t\in\mathbb{R}\quad \text{où}\quad \lambda_j\in\mathbb{C},\ P_j\in\mathbb{C}[X].$$

Réciproquement, il est bien évident que pour de telles fonctions $\mathscr{D}_f$ est de dimension finie.

2. *$\mathscr{T}_f$ étant engendré par les translations $x\mapsto f_a(x)=f(x-a)$, admet, s'il est de dimension finie, une base de la forme $f_{a_1},\dots,f_{a_d}$. Autrement dit, il existe des applications $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que*

   $$\forall\, a\in\mathbb{R},\quad f_a=\sum_{j=1}^{d}\varphi_j(a)f_{a_j}$$

   et il reste à montrer que ces applications ont la même régularité que f. Pour cela, le lemme suivant est crutial

   « Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ il existe une base de $E^\star$ de la forme $(\delta_{x_1},\dots,\delta_{x_d})$ (où $\delta_x(f):=f(x)$ est la masse Dirac au point x). En outre, si $(f_1,\dots,f_d)$ est une base de E : $\det((\delta_{x_j}(f_i)))_{ij}\neq 0$. »

   Preuve du lemme : *Comme $\dim(E^\star)=\dim(E)<\infty$ et que toute famille $(\delta_{x_1},\dots,\delta_{x_d})$ est libre dans $E^\star$ dès que les réels x_i sont deux à deux distincts l'existence de telles bases est élémentaire. On vérifie alors sans peine que la matrice de passage P de la base de E, $(g_1,\dots,g_d)$ duale de $(\delta_{x_1},\dots,\delta_{x_d})$ à la base $(f_1,\dots,f_d)$ est précisément la matrice $((\delta_{x_j}(f_i)))_{ij}$ qui est donc de déterminant non nul.* ■

   Ceci étant acquis, étant donné une base $(f_{a_1},\dots,f_{a_d})$ de $\mathscr{T}_f$ et (c.f. le lemme) $(x_1,\dots,x_d)$ tels que la matrice $A=((f_{a_i}(x_j)))$ soit inversible, nous avons

   $$\forall\, a\in\mathbb{R},\quad f_a(x)=\sum_{i=1}^{d}\varphi_i(a)f_{a_i}(x)(\star)$$

   et en particulier

   $$f_a(x_j)=\sum_{i=1}^{d}\varphi_i(a)f_a(x_j)=\sum_{i=1}^{d}\varphi_i(a)\delta_{x_j}(f_a),\quad \forall\, j\in\{1,\dots,d\}.$$

   Matriciellement cette égalité s'écrit

   $$A\begin{pmatrix}\varphi_1(a)\\ \vdots\\ \varphi_d(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{a_1}(a_1) & \dots & f_{a_1}(a_d)\\ \vdots & & \vdots\\ f_{a_d}(a_1) & \dots & f_{a_d}(a_d)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(a)\\ \vdots\\ \varphi_d(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(a_1-a)\\ \vdots\\ f(a_d-a)\end{pmatrix}$$

   mais par le lemme précédent, A est inversible, si bien qu'en posant $B=A^{-1}=((b_{ij}))$ le système linéaire précédent s'inverse pour donner

   $$\varphi_i(a)=\sum_{j=1}^{d}b_{ij}f(a_j-a),\quad 1\le i\le d.$$

Ces égalités assurent que les applications φ_i sont au moins aussi régulières que f.

3. Cette question maximise la précédente puisqu'il s'agit de montrer que les applications φ_j sont $\mathscr{C}^\infty$ dès que f est continue (rien d'étonnant, tout va s'expliquer dans la dernière question). Pour cela, considérons[1] une « approximation de l'identité » $(\theta_k)_k$. Les applications θ_k étant à support compact, et f continue donc localement intégrable, l'application $\theta_k \star f$ est bien définie, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on vérifie facilement que $(\theta_k \star f)_a = \theta_k \star f_a$. En outre, la convolution étant linéaire

$$(\theta_k \star f)_a = \theta_k \star f_a = \theta_k \star \left(\sum_{j=1}^{d} \varphi_j(a) f_{a_j}\right) = \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(a)(\theta_k \star f_{a_j}) = \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(a)(\theta_k \star f)_{a_j}. (\star)$$

L'espace vectoriel $\mathscr{T}_{\theta_k \star f}$ admet donc $((\theta_k \star f)_{a_1}, \dots, (\theta_k \star f)_{a_d})$ comme famille génératrice : il est donc de dimension finie. En outre, $(\theta_k)_k$ étant une approximation de l'identité, la matrice $A_k = ((\theta_k \star f_{a_i}(x_j)))_{ij} = ((\delta_{x_j}(\theta_k \star f_{a_i})))_{ij}$ converge vers la matrice inversible $A = ((f_{a_j}(x_i)))$. Par continuité du déterminant, il existe un entier k_0 tel que $A_k \in GL_d(\mathbb{R})$, $\forall\, k \geq k_0$. La linéarité des masses de Dirac δ_{x_j} implique alors que la famille $((\theta_{k_0} \star f)_{a_1}, \dots, (\theta_{k_0} \star f)_{a_d})$ est aussi libre, c'est donc une base de $\mathscr{T}_{\theta_{k_0} * f}$ et la formule $(\star)$ implique alors que les coordonnées de $(\theta_{k_0} \star f)_a$ sont $\varphi_1(a), \dots, \varphi_d(a)$: il ne reste plus qu'à appliquer la question

4. à la fonction $(\theta_{k_0} \star f)_a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ pour pouvoir affirmer que $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ sont $\mathscr{C}^\infty$ et conclure.

5. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $\dim(\mathscr{T}_f) < \infty$. Avec $(\star)$, nous avons

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f_{-x}(0) = \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(x) f_{a_j}(0) = \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(-x) f(-a_j)$$

et comme d'aprés la question précédente, les fonction φ_j sont $\mathscr{C}^\infty$ il en découle immédiatement que f l'est aussi.

6. Il reste à établir

$$(\dim \mathscr{T}_f = d < \infty) \iff (\dim \mathscr{D}_f = d < \infty) \iff \left(f(t) = \sum_{j=1}^{d} P_j(t) e^{\lambda_j t}\right).$$

La seconde équivalence a fait l'objet de la première question. Supposons que $\dim(\mathscr{T}_f) < \infty$, $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(f^{(k)})_{-a} = (f_{-a})^{(k)} = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(-a) f_{x_i}^{(k)} = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(-a)(f^{(k)})_{x_i}, \quad \forall\, a \in \mathbb{R},$$

en particulier, en évaluant $(f^{(k)})_{-a}$ à l'origine

$$f^{(k)}(a) = (f^{(k)})_{-a}(0) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(-a) f_{x_i}^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(-a)(f^{(k)})(-a_i), \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

ce qui montre que toutes les dérivées de f sont dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions $a \mapsto \varphi_i(-a),\ 1 \leq i \leq d$: $\mathscr{D}_f$ est donc de dimension finie.
Réciproquement, si $\dim(\mathscr{D}_f) < \infty$, *on peut écrire*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} P_i(x) e^{\lambda_i x}.$$

Comme il est facile de vérifier que

$$\forall\, g, h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}),\ \alpha \in \mathbb{C} \quad : \quad \mathscr{T}_{g+h} \subset \mathscr{T}_g + \mathscr{T}_h, \quad \mathscr{T}_{\alpha h} \subset \mathscr{T}_h$$

il en résulte que $\dim(\mathscr{T}_g) < \infty$ *et* $\dim(\mathscr{T}_h) < \infty$ *impliquent que* $\dim(\mathscr{T}_{f+g}) < \infty$ *et* $\dim(\mathscr{T}_{\alpha h}) < \infty$. *Ainsi, vu la forme de f, il est suffisant de montrer que* $\dim(\mathscr{T}_{x \mapsto x^n e^{\lambda x}}) < \infty$ *ce qui est immédiat. Q.E.D.*

Références