

optimisation, combinatoire

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ optimisation, combinatoire

Quelle est la valeur maximum $f(n)$ de

$$|\sigma(1) - \sigma(2)| + |\sigma(3) - \sigma(4)| + \dots + |\sigma(n-1) - \sigma(n)|$$

σ décrivant toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$?

Solution : **Remarque liminaire :** dans une configuration optimale les termes $\sigma(i)$ doivent alternativement croître et décroître : en effet si $\sigma(i) < \sigma(i+1) < \sigma(i+2)$ (ou $\sigma(i) > \sigma(i+1) > \sigma(i+2)$) alors $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| + |\sigma(i+1) - \sigma(i+2)| = |\sigma(i) - \sigma(i+2)|$, si bien que la permutation associée à l'une des deux suites d'entiers $(\sigma(i+1), \sigma(1), \dots, \sigma(i), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n))$ et $(\sigma(1), \dots, \sigma(i), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n), \sigma(i+1))$ fournira une somme strictement plus grande que celle associée à σ .

Passons à la solution. Mieux vaut distinguer les cas n pair et impair. Si $n = 2m$

Références