Des limites

Alain Soyeur[1], Bernhard Keller[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Professeur, Université Paris Diderot, Paris
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Des limites***

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x+2}{e^x+1}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{3^x}$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{3^x}$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^{-x} - x$
8. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$ *où* $1 < a < b$.
11. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$
12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Solution :

1. $x^{\frac{1}{x}} = e^{\dfrac{\ln x}{x}}$ *mais* $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ *donc* $x^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} e^0 = \boxed{1}$.
2. $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln x}$ *mais* $\sqrt{x}\ln x = x^{\frac{1}{2}} \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ *donc* $x^{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} e^0 = \boxed{1}$.
3. $x^{\frac{1}{x}} = e^{\dfrac{\ln x}{x}}$ *mais* $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ *donc* $x^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \boxed{0}$.
4. $\frac{e^x+2}{e^x+1} = \frac{1+2e^{-x}}{1+e^{-x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \boxed{1}$.
5. $\frac{xe^x}{3^x} = x\left(\frac{e}{3}\right)^x = xe^{x \ln \frac{e}{3}}$ *donc* $\frac{xe^x}{3^x} \overset{X = x \ln \frac{e}{3}}{=\!=\!=} \dfrac{X}{\ln \frac{e}{3}} e^X \xrightarrow[X \to -\infty]{} \boxed{0}$

6. *De la même façon, toujours parce que* $e<3$ *:* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{3^x}=\boxed{-\infty}$.

7. $x^2e^{-x}-x=x^2e^{-x}\left(1-\dfrac{e^x}{x}\right)\xrightarrow[x\to-\infty]{}\boxed{+\infty}$

8. $x^x=e^{x\ln x}$ *mais* $x\ln x\xrightarrow[x\to0^+]{}$ *donc* $x^x\xrightarrow[x\to0^+]{}e^0=\boxed{1}.t$

9. $\frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}=\dfrac{e^{x\ln(x^x)}}{e^{x^x\ln x}}=e^{\left(x^2-x^x\right)\ln x}=e^{\left(x^{2-x}-1\right)x^x\ln x}$ *mais* $x^{2-x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ *donc :* $x^{2-x}-1\xrightarrow[x\to+\infty]{}-1$. *Comme* $x^x\ln x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, *par opérations sur les limites,* $\left(x^{2-x}-1\right)x^x\ln x\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty$ *et donc :* $\frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}$.

10. $\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}=\dfrac{e^{b^x\ln a}}{e^{a^x\ln b}}=e^{a^x\ln b-b^x\ln a}=e^{b^x\ln b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x-\dfrac{\ln a}{\ln b}\right)}$ *mais* $b^x\ln b\xrightarrow[x\to+\infty]{}\infty$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ *et* $\dfrac{\ln a}{\ln b}>0$ *donc* $\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{+\infty}$.

11. $\sqrt{x}\ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)=2x^{\frac12}\ln x-x^{\frac12}\ln(1+x)\xrightarrow[x\to0]{}\boxed{0}$

12. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac1x}=e^{\dfrac{\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x}}=e^{\frac1x(\ln\ln x-\ln x)}$ *mais* $\dfrac{\ln x}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ *et* $\dfrac{\ln(\ln x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ *donc* $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac1x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}e^0=\boxed{1}$.

13. $\left(1+\frac1x\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac1x\right)}=e^{\dfrac{\ln\left(1+\frac1x\right)}{\frac1x}}$ *mais* $e^{\dfrac{\ln\left(1+\frac1x\right)}{\frac1x}}\overset{X=\frac1x}{=\!=\!=}e^{\dfrac{\ln(1+X)}{X}}\xrightarrow[X\to0]{}e^1=\boxed{e}$.

Références