Nombre de points à coordonnées entières dans un disque, comportement au bord d'une série entière

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Nombre de points à coordonnées entières dans un disque, comportement au bord d'une série entière***

Soient pour $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n := B_{\mathbb{R}^2}(0, n),\ p_n := \operatorname{card}\left(D_n \cap \mathbb{Z}^2\right),\ p_n^+ := \operatorname{card}\left(D_n \cap \mathbb{N}^2\right).$$

1. *Montrer que*
$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi n^2 \quad \text{et} \quad p_n^+ \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi n^2/4.$$
2. *En déduire que*
$$\lim_{t\to 1_-} (1-t^2)^{1/2} \sum_{n\geq 0} t^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-t}}.$$
3. *En déduire que*
$$\lim_{x\to -1_+} \sum_{n\geq 0} x^{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Solution :

1. *À tout point $p = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ associons $C(p)$ le carré plein centré en p dont les cotés de longueur 1 sont paralléles aux axes. On vérifie facilement que si $p \neq p' \in \mathbb{Z}^2$ alors l'aire de $C(p) \cap C(p')$ est nulle. Posons alors :*

$$A(n) = \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Z}^2 \\ C(p)\subset D(n)}} C(p), \quad B(n) = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}^2\cap D(n)} C(p), \quad C(n) = \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Z}^2 \\ C(p)\cap D(n)\neq\emptyset}} C(p)$$

Visiblement $A(n) \subset B(n) \subset C(n)$, et par construction même, l'aire de $B(n)$ est précisément p_n. En outre comme

$$D(n-2) \subset A(n) \subset B(n) \subset C(n) \subset D(n+2)$$

(car $2 > \sqrt{2}$) nous pouvons écrire

$$\pi(n-2)^2 \leq p(n) \leq \pi(n+2)^2$$

soit $\quad p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \pi n^2$.

Maintenant, remarquons que dans $D(n)$, les points à coordonnées entières sur les axes sont au plus $4n = o(n^2)$ donc négligeables par rapport à p_n : on peut donc ignorer ces points, des arguments évidents de symétrie impliquent alors que $\quad p_n^+ \underset{n\to\infty}{\sim} p_n/4 \quad$ soit $\quad p_n^+ \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi n^2}{4}$.

2. Pour $|t| < 1$, nous avons (produit de Cauchy)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{l,m\in\mathbb{N}\\ l^2+m^2=k}} t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} q(k)t^k$$

où $q(k)$ désigne le nombre de couples $(l,m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $l^2+m^2 = k$. Considérons alors l'application définie pour $|t| < 1$ par

$$G(t) = \frac{1}{1-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}\right)^2.$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
G(t) &= \frac{1}{1-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}\right) = \frac{1}{1-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}\right)^2\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} q(k)t^k\right)\\
&= \sum_{d=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{d} q(k)\right)t^k \quad \text{(toujours par produit de Cauchy).}
\end{aligned}$$

Maintenant, si l'on observe que $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} q(k) = p^+(\sqrt{d})$, on peut écrire

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p^+(\sqrt{k})t^k.$$

D'aprés la première question $\; p^+(\sqrt{d}) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\pi d}{4}$. Considérons alors pour $|t| < 1$

$$H(t) := \frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = \frac{\pi}{4}\frac{1}{(1-t)^2}.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n/4}{\pi(n+1)/4} = 1,$$

un théorème classique (ref.... ?) implique que

$$\lim_{t\to 1_-} \frac{G(t)}{H(t)} = \lim_{t\to 1_-} \left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{(1-t)^2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{1-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}\right)^2\right) = 1$$

soit encore

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2} \underset{t\to 1_-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-t}}.$$

Q.E.D.

3. *Commencer par calculer la limite lorsque x tends vers 1_- et pour en déduire la limite en -1 découper la somme en parties paire et impaires...*

Références