

# Exemple d'une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier

Patrice Lassère<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

**Exercice 0.1** ★ **Exemple d'une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier**

[1]

Soit  $\sum_{n \geq 1} a_n \sin(nt)$  une série trigonométrique où  $a_n \geq 0 \forall n \geq 1$ .

1. On suppose que cette série est une série de Fourier, c'est à dire qu'il existe  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  telle que  $c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt \forall n \in \mathbb{Z}$  i.e.  $c_0(f) = 0$  et, si  $n \geq 1$  :  $c_n(f) = \frac{a_n}{2i}$ ,  $c_{-n}(f) = -\frac{a_n}{2i}$ . Soit  $F(t) = \int_0^t f(u)du$ . Montrer que  $F$  est continue et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  et, pour

$$|n| \geq 1 : c_{|n|}(F) = -\frac{a_{|n|}}{2|n|}$$

2. En déduire que  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$  converge.
3. Montrer que la série trigonométrique partout convergente  $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(nt)}{\log(n)}$  n'est pas une série de Fourier.

**Solution :** La solution.....

## Références

- [1] H. Queffelec and C. Zuily. *Éléments d'Analyse, Agrégation de Mathématiques*. Dunod, 2002.