Un bien utile lemme de factorisation

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ **_Un bien utile lemme de factorisation_**

1. *Soient E, F, G trois espaces vectoriels. Si G est de dimension finie et s'il existe $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(E,G)$ telles que*

$$(\forall\, x \in E)\,(g(x) = 0) \Longrightarrow (f(x) = 0)\,, (\star)$$

alors il existe $h \in \mathscr{L}(G,F)$ telle que $f = h \circ g$.

2. ***Application 1 :*** *Soient E un espace vectoriel, $f, f_1, \dots, f_n \in E^\star$ des formes linéaire telles que*

$$(\forall\, x \in E)\,(f_i(x) = 0, \quad \forall\, i = 1 \dots n) \Longrightarrow (f(x) = 0)\,,$$

alors il existe des scalaires $c_1, \dots, c_n$ tels que $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$.

3. ***Application 2 :*** *Montrer que toute distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ de support l'origine est combinaison linéaire de dérivées de la distribution de Dirac.*

Solution :

1. *L'hypothèse $(\star)$ implique*

$$(\forall\, x, y \in E)(g(x) = g(y)) \Longrightarrow (f(x) = f(y)).$$

Ainsi, pour $t = g(x) \in \mathrm{im}(g)$, la formule $h_1(t) = f(x)$ définit bien une application $h_1 \in \mathscr{L}(\mathrm{im}(g), F)$ vérifiant $f = h_1 \circ g$ sur $\mathrm{im}(g)$ et le problème est déja résolu sur $\mathrm{im}(g)$. Pour construire une solution sur G, on considére (puisque G est de dimension finie) un supplémentaire H de $\mathrm{im}(g)$ dans G et p la projection sur $\mathrm{im}(g)$ paralellement à H ; alors, $h = h_1 \circ p$ répond visiblement au problème.

2. *Pour l'application en considèrant $g = (f_1, \dots, f_n) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}^n)$, on se retrouve dans la situation précédente avec $F = \mathbb{K}$ et $G = \mathbb{K}^n$: il existe donc $h \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ telle que $f = h \circ g$. Mais la forme générale des éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ est bien connue : il existe $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tels que $h(z) = (z_1, \dots, z_n)) = c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n$ d'où le résultat.*

   Remarque : *Ce dernier résultat est essentiel en analyse fonctionnelle (voir l'exercice précédent où la question ci-dessous) ; on trouvera aussi dans* H.Brézis « Analyse fonctionnelle » Masson 19 ? ? *une démonstration trés amusante de ce résultat s'appuyant sur le théorème d'Hahn-Banach.*

3. $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ *est à support compact, donc d'ordre fini : il existe une constante* $C > 0$, *un entier* $N \in \mathbb{N}$ *tels que*[1]

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{n \in \mathbb{N}^d,\ |k| \leq N} |\varphi^{(k)}(0)|, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d).$$

Ainsi, la forme linéaire T *s'annule au point* φ *dés que les formes linéaires* $\delta^{(k)} \;:\; \varphi \mapsto \langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \varphi^{(k)}(0),\ |k| \leq N$ *s'annulent. Avec la question précédente, il existe des scalaires* c_i *tels que*

$$T = \sum_{|i| \leq N} c_i\, \delta^{(i)},$$

Q.E.D.

Références