Sur la topologie de la convergence simple

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

22 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Sur la topologie de la convergence simple***

Soient X un ensemble, $(E,(\|.\|_i)_{i\in I})$ un espace localement convexe (e.l.c.). Sur l'ensemble $\mathscr{F}(X,E)$ de toutes les applications de X dans E, on considère la topologie d'e.l.c. définie par les semi-normes

$$\|f\|_{i,x}=\|f(x)\|_i,\quad i\in I,\ x\in X.$$

1. *Montrer qu'une suite $(f_n)_n\subset\mathscr{F}(X,E)$ converge vers une application $f\ :\ X\to E$ pour cette topologie si, et seulement si, elle converge simplement sur X vers f. (On appellera donc* ***« topologie de la convergence simple »*** *cette topologie sur $\mathscr{F}(X,E)$ que l'on désignera alors par $\mathscr{F}_s(X,E)$).*
2. *Si E est séparé, montrer que $\mathscr{F}_s(X,E)$ est séparé.*
3. *Si E est métrisable et si $E\neq\{0_E\}$, montrer que l'espace $\mathscr{F}_s(X,E)$ est métrisable si, et seulement si, X est dénombrable.*
4. *Si Eest un espace de Fréchet (e.l.c. métrisable complet) et si X est dénombrable, montrer que $\mathscr{F}_s(X,E)$ est un espace de Fréchet.*
5. *Si E est un espace normé et si $E\neq\{0_E\}$, montrer que l'espace $\mathscr{F}_s(X,E)$ est normable si, et seulement si, X est fini.*
6. *On suppose que $E=\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ où $\mathbb{C})$ et on pose $F=\mathscr{F}_s(X,\mathbb{K})$.*

   a) Si $a\in\mathbb{X}$, montrer que la forme linéaire sur F $\delta_a\ :\ f\mapsto f(a)$ est continue.

   b) Soit $T\in F'$ une forme linéaire continue, montrer qu'il existe une partie finie $A\subset X$ telle que $T(f)=0$ dès que f est nulle sur A.

   c) En déduire que les formes linéaires continues sur F sont de la forme

$$T=\sum_{a\in A\in PF(X)}c_a\delta_a,\quad c_a\in\mathbb{K}.$$

7. ***Un exemple.*** *On considère l'espace $\mathbb{K}[[x]]$ des séries formelles à une indéterminée. Cet espace s'identifie de manière naturelle à $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ en associant à toute série formelle $P=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nx^n$ la fonction $n\mapsto a_n$. On peut donc définir sur l'espace $\mathbb{K}[[x]]$ la topologie de la convergence simple, on le note alors $\mathbb{K}_s[[x]]$.*

   a) Montrer que l'espace $\mathbb{K}_s[[x]]$ possède la propriété de Montel.

b) *Soit* $Q = \sum_{n=0}^{N} b_n x^n$ *un polynôme. Montrer que l'application*

$$\mathbb{K}_s[[x]] \ni P \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n$$

est une forme linéaire continue sur $\mathbb{K}_s[[x]]$ *et que l'on obtient ainsi toutes les formes linéaires continues.*

c) *Montrer que le sous-espace vectoriel* $\mathbb{K}[x]$ *des polynômes est dense dans* $\mathbb{K}_s[[x]]$ *et que les formes linéaires sur ce sous-espace s'écrivent* $P \mapsto \langle P, Q \rangle$ *où* $Q \in \mathbb{K}[x]$*. Si* P *est une série formelle qui n'est pas un polynôme, vérifier que la forme linéaire* $P \mapsto \langle P, Q \rangle$ *sur l'espace* $\mathbb{K}[x]$ *n'est pas continue.*

Solution :

1. *Une suite* $(f_n)_n$ *dans* $\mathscr{F}_s(X, E)$ *converge vers* 0 *si, et seulement si*

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow[\mathscr{F}_s]{} 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, i \in I\ :\ \lim_n \|f_n\|_{i,x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in I\ :\ \lim_n f_n(x) = 0 \ \text{ dans } E \\ &\Leftrightarrow \quad (f_n)_n \text{ converge simplement vers } \ f \equiv 0 \ \text{ sur } X. \end{aligned}$$

2. *Soit* $f \in \mathscr{F}(X, E)$*, si* f *n'est pas identiquement nulle, il existe* $x \in X$ *tel que* $f(x) \neq 0$ *;* E *étant séparé, il existe* $i \in I$ *tel que* $\|f(x)\|_i \neq 0$*. Il existe donc* $x \in X$ *et* $i \in I$ *tels que* $\|f\|_{i,x} \neq 0$ *: l'espace* $\mathscr{F}_s(X, E)$ *est bien séparé.*
3. - *Si* $E = \{0\}$*,* $\mathscr{F}_s(X, E)$ *est métrisable quelquesoit* X*.*
   - *Supposons* E *non réduit au vecteur nul et métrisable. Nous savons ([?] théorème 3.4.6) que sa topologie peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes* $(\|.\|_i)_{i \in \mathbb{N}}$*. Pour les mêmes raisons, si* $\mathscr{T}_s$ *est métrisable elle est engendrée elle aussi par une famille dénombrable de semi-normes* $(\|.\|_{i_k, x_l})_{(k,l) \in \mathbb{N}^2}$ *; mais si* X *n'est pas dénombrable, il existe* $a \notin \{x_l,\ l \in \mathbb{N}\}$ *et l'application* $f \in \mathscr{F}_s(X, E)$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a, \\ 1 & \text{si } x = e \end{cases}$$

   où $e \in E \setminus \{0\}$ *n'est pas identiquement nulle car* $f(a) = e \neq 0$*, mais elle vérifie*

$$\|f\|_{i_k, x_l} = 0,\ \forall\, k, l \in \mathbb{N}.$$

   $\mathscr{T}_s$ *n'est donc pas séparée ce qui absurde (puisque par hypothèse métrisable) :* X *est donc dénombrable.*
   - *Si* X *est dénombrable,* $X = \{x_k\}_k$ *la topologie* $\mathscr{T}_s$ *sera engendrée par la famille de semi-normes* $(\|.\|_{i_k, x_l})_{k,l}$ *et sera séparée car* E *est séparé : elle est ([?] théorème 3.4.6) métrisable.*
4. *Aprés la question précédente il reste à montrer que* $\mathscr{F}_s(X, E)$ *est complet. Soit donc une suite de Cauchy* $(f_n)_n$ *dans* $\mathscr{F}_s(X, E)$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon\ :\ \forall n, p \geq N_\varepsilon \quad \|f_n - f_p\|_{i,l} = \|f_n(x_l) - f_p(x_l)\|_i \leq \varepsilon, \quad \forall\, i, l \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, la suite $(f_n(x_l))_n$ est pour tout entier $l \in \mathbb{N}$ une suite de Cauchy dans E complet : elle est donc convergente et en notant $f(x_l)$ sa limite, on a $f_n \to f$ dans $\mathscr{F}_s(X,E)$ qui est bien complet.

5. *Supposons $\mathscr{T}_s$ normable et X infini. E étant aussi normé, un voisinage fondamental de l'origine dans $\mathscr{F}_s(X,E)$ sera de la forme*

$$\bigcap_{j\in J} B_{x_j}(r_j) = \bigcap_{j\in J} \{f \in \mathscr{F}_s(X,E) \ : \ \|f(x_j)\| \leq r_j\},$$

où J est une partie finie de I. Il est clair qu'un tel voisinage n'est pas borné (comme X est infini, il contient les droites vectorielles $\mathbb{K}f$ où $f \in \mathscr{F}_s(X,E)$, $f \neq 0$ et $f_{/J} \equiv 0$). $\mathscr{T}_s$ est une topologie non localement bornée, donc non normable. Réciproquement, X fini et E normé impliquent $\mathscr{F}_s(X,E)$ normable : si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ on définit une norme sur $\mathscr{F}(X,E)$ en posant $N(f) = \max_{1\leq i\leq n} \|f(x_i)\|$ et la topologie associée à cette est norme coïncide avec $\mathscr{T}_s$; pour s'en persuader on peut remarquer par exemple que

$$\forall\, 1 \leq i \leq n \ : \quad \|f_i(x)\| \leq N(f) = \max_{1\leq i\leq n} \|f(x_i)\|$$

assure que l'identité entre $(\mathscr{F}(X,E), \mathscr{T}_N)$ et $(\mathscr{F}(X,E), \mathscr{T}_s)$ est un isomorphisme topologique.

6. *a) Soit $a \in X$ l'égalité $|\delta_a(f)| = |f(a)| = p_a(f)$ garanti la continuité de δ_a.*

b) et c) Un résultat d'algèbre (exercice ? ? ?) linéaire assure que pour tout espace vectoriel E, si des formes linéaires $f, f_1, \dots, f_n \in E^\star$ vérifient $(f_i(x) = 0,\ \forall\, i \in \{1,\dots,n\}) \Rightarrow (f(x) = 0)$ alors il existe des constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ telles que $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$.

Soit T une forme linéaire continue sur $\mathscr{F}(X,E)$, il existe une partie finie $A \subset X$ et une constante $C > 0$ telles que

$$\forall\, \mathscr{F}(X,E) \ : \ |T(f)| \leq C \sup_{a\in A} p_a(f) = C \sup_{a\in A} |f(a)| = C \sup_{a\in A} |\delta_a(f)|.$$

Ainsi, $(\delta_a(f) = 0,\ \forall\, a \in A) \Rightarrow (T(f) = 0)$; il ne reste plus qu'à invoquer le rappel d'algèbre linéaire précédent.

7. *a) Il faut montrer que les parties bornées sont relativement compactes. Soit $B \subset \mathbb{K}[[x]]$ une partie bornée ; pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_l telle que*

$$p_l(P) = |a_l| \leq C_l, \quad \forall\, P = \sum_n a_n x^n \in B.$$

Autrement dit,

$$B \subset K := \prod_{l\in\mathbb{N}} \{|z| \leq C_l\} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \simeq \mathscr{F}_s(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

*La topologie induite sur K par $\mathscr{F}_s(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est bien entedu la « topologie produit » : K est donc une partie compacte de $\mathscr{F}_s(\mathbb{N},\mathbb{K})$ d'aprés le théorème de Tychonoff ([**?**] théorème 2.32.5) et B est bien relativement compacte.*

b)

c)

Références