Séries de fourier et séries trigonométriques

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Séries de fourier et séries trigonométriques

[1], [2].

1. *Soit* $f \in L^1([-\pi,\pi])$ *une application* 2π*-périodique.* $(a_n)_n, (b_n)_n$ *désignant ses coefficients de Fourier réels, montrer que pour tout* $x \in [0, 2\pi]$ *:*
$$\int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n \sin(nx) + b_n(1-\cos(nx))}{n}.$$
2. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{b_n}{n}$ *converge.*
3. *En déduire que la série trigonométrique* $\sum_{n\geq 2} \dfrac{\sin(nx)}{\log(n)}$ *n'est la série de Fourier d'aucune fonction* $f \in L^1([-\pi,\pi])$*.*
4. *Soit* $(a_n)_n$ *une suite décroissante vers zéro vérifiant*
$$a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Montrer que la série trigonométrique $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx)$ *est la série de fourier d'une fonction* $f \in L^1([-\pi,\pi])$ *positive.*
5. *En déduire que la série trigonométrique* $\sum_{n\geq 2} \dfrac{\cos(nx)}{\log(n)}$ *est la série de Fourier d'une telle fonction.*

Solution :

1. *Par périodicité* f *est intégrable sur* $[0, 2\pi]$ *et par suite la fonction* $F(x) = \int_0^x (f(t) - \frac{a_0}{2})dt$ *est à variation bornée sur* $[0, 2\pi]$ *; en outre, elle est* 2π*-périodique et*
2.
3.
4.
5.

Références

[1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Integration, volume 3 of Student Mathematical Library. AMS, 2003.

[2] H. Queffélec and C. Zuily. Éléments d'Analyse, Agrégation de Mathématiques. Dunod, 2002.