Probabilités, géométrie

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Probabilités, géométrie***

Un point P est choisi au hasard (relativement à la distribution uniforme) dans un triangle équilatéral $\mathbf{T}$. Quelle est la probabilité qu'il existe un point $Q \in \mathbf{T}$ dont la distance à P est supérieure à la hauteur de $\mathbf{T}$?

Solution : *Soient A, O, B les sommets de $\mathbf{T}$, M le milieu de OB, C l'orthocentre de $\mathbf{T}$ et R l'intersection entre la hauteur de AB (h désignera sa longueur) et le cercle de centre A et de rayon $\overline{AM}$. Supposons $AO = OB = BA = 1$, la probabilité cherchée est*

$$p = \frac{24\mathscr{A}(ORM)}{\sqrt{3}}.$$

Fixons l'origine en O, l'axe des abcisses positives suivant OB et celui des ordonnées positives suivant la direction de AM. Les coordonnées (x, y) de R vérifient

$$y = \frac{x}{3}\sqrt{3}, \quad (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

soit

$$x = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{6}), \quad y = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

à suivre...................

Références