Une caractérisation de la convexité

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une caractérisation de la convexité***

([1], EXO. 1.8.3).

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *vérifiant l'inégalité de la moyenne suivante*

$$f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}_+^\star.$$

Montrer que

1. *Le maximum de* f *sur tout segment est atteint en une des extrémités.*
2. f *est convexe.*

Solution : *1) Supposons qu'il existe un intervalle* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *sur lequel* f *n'atteint pas son maximum en les extrémités* a *et* b*. Par continuité de* f *nous avons tout de même*

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(c) \quad \text{avec} \quad a < c < b$$

et il existe $a < a_0 < c < b_0 < b$ *tels que*

$$f(x) < f(c), \quad \forall x \in [a, a_0] \cup [b_0, b].$$

à suivre.........

Références

[1] P. Ney de Souza and J.N. Silva. Berkeley Problems in Mathematics. Problem Books in Mathematics. Springer, 2000.