Inégalité de Bernstein (2)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Inégalité de Bernstein (2)***

[1], 110-9/10.

1. *Montrer qu'un polynôme trigonométrique de degré n qui admet au moins $2n+1$ racines distinctes dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ est identiquement nul.*
2. *Soit f un polynôme trigonométrique de degré n à valeurs réelles. On suppose que $f'(0) = \|f'\|_\infty > n\|f\|$ et on considère le polynôme trigonométrique $g(x) = n^{-1}\|f'\|_\infty \sin(nx) - f(x)$.*
   - *Montrer que g admet au moins $2n$ racines distinctes sur $[0, 2\pi[$.*
   - *Montrer que g' admet au moins $2n+1$ racines distinctes sur $[0, 2\pi]$.*
   - *Montrer que g'' admet au moins $2n+1$ racines distinctes sur $[0, 2\pi[$. Conclusion ?*
3. *Soit f un polynôme trigonométrique de degré n à valeurs réelles. Montrer que*

$$\|f'\|_\infty \leq n\|f\|_\infty \qquad \text{(Inégalité de Bernstein).}$$

Solution : *Un polynôme trigonométrique de degré au plus n peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = e^{-inx}P(x)$$

où $P(X) = \sum_{k=-n}^{n} c_k X^{k+n}$ est un polynôme de degré au plus $2n$.

1. *Soit f un tel polynôme. Si f admet $2n+1$ racines distinctes $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{2n+1}$ dans $[0, 2\pi[$, les $2n+1$ nombres complexes distincts $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{2n+1}}$ sont racines du polynôme P quiest donc le polynôme nul et par suite f est la fonction nulle.*
2. *Le cas $n = 0$ est évident, nous supposerons $n \geq 1$. Posons*

$$x_k = \frac{\pi}{2n} - \frac{k\pi}{n}, \quad k = O, 1, \dots, 2n.$$

Nous avons

$$g(x_k) = \frac{(-1)^k}{n}\|f'\| - f(x_k)$$

et l'hypothèse $\|f'\|_\infty > n\|f\|$ assure que $g(x_k)$ est du signe de $(-1)^k$. Par conséquent g s'annule sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ ce qui donne $2n$ zéros sur l'intervalle $[x_0, x_0 + 2_p i]$. La 2π-périodicité permet d'affirmer que g s'annule également $2n$ fois sur $[0, \pi[$.

3.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.