Convergence faible dans $\mathscr{C}^0(X)$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Convergence faible dans*** $\mathscr{C}^0(X)$ ***Polytechnique***

Soit X un espace métrique compact.

1. *Montrer qu'une suite $(f_n)_n \subset \mathscr{C}^0(X)$ est faiblement convergente dans $\mathscr{C}^0(X)$ si, et seulement si elle est uniformément bornée et simplement convergente sur X.*
2. *En déduire que pour toute suite $(f_n)_n \subset \mathscr{C}^0(X)$ uniformément bornée sur X et simplement convergente vers f, il existe une suite $(\tilde{f}_n)_n$ où $\tilde{f_n} \in \mathrm{conv}\{\mathrm{f_1}, \dots, \mathrm{f_n}\},\ \forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$, qui converge uniformément sur X vers f.*

Solution :

1. *D'aprés le théorème de représentation de Riesz, le dual de $\mathscr{C}^0(X)$ est l'ensemble des mesures boreliennes de masse totale finie sur X dont font partie les masses de Dirac*

$$\mathscr{C}^0(X) \ni f \ \longmapsto \int_X f\delta_x = f(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Ainsi, toute suite $(f_n)_n$ faiblement convergente dans $\mathscr{C}^0(X)$ vers f vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{X}, \qquad \int_X f_n\delta_x = f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f\delta_x = f(x)$$

i.e. $(f_n)_n$ est simplement convergente sur X vers f.
Comme dual de l'espace de Banach $\mathscr{C}^0(X)$, $\mathscr{C}^0(X)'$ est aussi un espace de Banach contenant les f_n (identifiées aux fonctionnelles $\mathscr{C}^0(X)' \ni \mu \ \mapsto \int_X f_n\mu$). De l'inégalité

$$\left|\int_X f_n\mu\right| \leq ||f_n||_\infty \int_X |\mu|$$

on tire $|||f_n||| \leq ||f_n||_\infty$ et comme cette inégalité est une égalité pour $\mu = \delta_{x_n}$ où $x_n \in X$ vérifie $|f_n(x_n)| = ||f_n||_\infty$ on a

$$|||f_n||| \leq ||f_n||_\infty .(\star)$$

En outre avec l'hypothèse de convergence faible la suite $(\langle f_n, \mu\rangle)_n$ est bornée (puisque convergente) : on peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus qui assure que la suite $(|||f_n|||)_n$ est elle même bornée ce qui, avec $(\star)$ achève la première implication.

Réciproquement, considèrons une suite $(f_n)_n \mathscr{C}^0(X)$ simplement convergente sur X vers f et uniformément bornée (disons par $C > 0$). Comme $\mathbf{1}_A \in L^1(X, |\mu|)$ pour toute mesure de Radon sur X, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mu = \int_X f \mu, \qquad \forall\, \mu \in \mathscr{C}^0(X)'$$

en d'autre termes, $(f_n)_n$ converge faiblement vers f. CQFD.

2. *L'existence de la suite $(\tilde{f}_n)_n$ équivaut à montrer que f est dans l'adhérence de l'enveloppe convexe C des f_n lorsque $f_n \rightharpoonup f$. La forme géométrique du théorème de Hahn-Banach nous dit qu'il est équivalent de montrer qu'aucune forme linéaire ne sépare f et C :*

$$\forall\, \varphi \in \mathscr{C}^0(X)', \quad \varphi(C) \leq \alpha \quad \Longrightarrow \quad \varphi(f) \geq \alpha.$$

Soit φ une telle forme et μ la mesure associée :

$$\varphi(f) = \int_X f \mu, \qquad f \in \mathscr{C}^0(X).$$

Vu les hypothèses et la première question (ou par convergence dominée) $(f_n)_n$ converge faiblement vers f, en particulier

$$\varphi(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(f)$$

et comme $\varphi(f_n) \geq \alpha$ on aura $\varphi(f) \geq \alpha$ i.e. $f \in \overline{C}^{\mathscr{C}^0(X)}$ i.e. il existe une suite $(\tilde{f}_n)_n \subset C$ qui converge vers f dans $\mathscr{C}^0(X)$ soit uniformément sur X.

Références