Des inéquations

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and Bernhard Keller[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3]Professeur, Université Paris Diderot, Paris

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Des inéquations***

Résoudre les inéquations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

1. $\ln\left(x^2-2x\right) > \ln(4x-5)$
2. $e^{x^2} > (e^x)^4 \times e$.
3. $a^{x^2} < (\sqrt{a})^{7x-3}$ *où* $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Solution :

1. *On vérifie que l'inéquation n'est valide que si* $x > 2$.

$$\begin{aligned} & \ln\left(x^2-2x\right) > \ln(4x-5) \\ \Rightarrow \quad & x^2-2x > 4x-5 \quad \text{car } \ln \text{ est croissante} \\ \Rightarrow \quad & x^2-6x+5>0 \\ \Rightarrow \quad & x \in \left]-\infty,1\right[\cup \left]5,+\infty\right[\end{aligned}$$

Compte tenu du domaine de validité de l'inéquation, $\ln\left(x^2-2x\right) > \ln(4x-5)$ *seulement si* $x > 5$. *Réciproquement, on montre que si* $\boxed{x>5}$ *alors l'inéquation est vérifiée.*

2. *L'inéquation est valide sur* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & e^{x^2} > (e^x)^4 \times e \\ \iff \quad & e^{x^2-1} > e^{4x} \\ \iff \quad & x^2-1>4x \quad \text{car } \exp \text{ est croissante} \\ \iff \quad & x^2-4x-1>0 \\ \iff \quad & x \in \left]-\infty, 2-\sqrt{5}\right[\cup \left]2+\sqrt{5}, +\infty\right[\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation est donc : $\boxed{-\infty 2-\sqrt{5} \cup 2+\sqrt{5} +\infty}$

3. L'inéquation est valide sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & a^{x^2} < (\sqrt{a})^{7x-3} \\ \iff \quad & x^2 \ln a < \frac{7x-3}{2} \ln a \quad \textit{car } \ln \textit{ est croissante} \end{aligned}$$

Lorsque $\ln a > 0$ *c'est-à-dire lorsque* $a > 1$,

$$\begin{aligned} & a^{x^2} < (\sqrt{a})^{7x-3} \\ \iff \quad & x^2 < \frac{7x-3}{2} \quad \textit{car } a \neq 1 \textit{ donc } \ln a \neq 0 \\ \iff \quad & 2x^2 - 7x + 3 < 0 \\ \iff \quad & x \in \left]\frac{1}{2}, 3\right[\end{aligned}$$

L'inégalité est vraie si et seulement si $\boxed{x \in \frac{1}{2}3}$.
Lorsque $\ln a < 0$ *c'est-à-dire lorsque* $0 < a < 1$,

$$\begin{aligned} & a^{x^2} > (\sqrt{a})^{7x-3} \\ \iff \quad & x^2 > \frac{7x-3}{2} \\ \iff \quad & 2x^2 - 7x + 3 > 0 \\ \iff \quad & x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup]3, +\infty[\end{aligned}$$

L'inégalité est vraie si et seulement si $\boxed{x \in -\infty\frac{1}{2} \cup 3{+}\infty}$.

Références