Trois problèmes d'optimisation autour d'une droite et une parabole

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Trois problèmes d'optimisation autour d'une droite et une parabole***

On considère un point P, distinct de l'origine et situé sur la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$. La normale à $(\mathscr{P})$ passant par P recoupe la parabole en un point Q.

1. *Déterminer P pour que l'arc de parabole soit minimum.*
2. *Déterminer P pour que le périmètre de la région bornée délimitée par $(\mathscr{P})$ et PQ soit minimum.*
3. *Déterminer P pour que l'aire de la région bornée délimitée par $(\mathscr{P})$ et PQ soit minimum.*

Solution :

1. *Considérons un point (x, x^2), $(x > 0)$ sur la parabole. La pente de la normale à $(\mathscr{P})$ passant par (x, x^2) vaut $-1/2x$; si elle recoupe la parabole au point (z, z^2) nous aurons donc*

$$\frac{z^2 - x^2}{z - x} = -\frac{1}{2x}$$

soit comme $x > 0$:

$$z = z(x) = -x - 1/2x = -\frac{2x^2 + 1}{2x}.$$

La formule pour la longueur d'un arc nous donne

$$s(x) = u(x) - u(z(x)), \qquad \text{avec} \quad u(a) = \int_0^a \sqrt{1 + 4t^2}dt$$

et il s'agit de minimiser $x \mapsto s(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Avec le théorème fondamental du calcul intégral nous avons

$$s'(x) = \sqrt{1 + 4x^2} - z'(x)\sqrt{1 + 4z^2(x)}, \qquad x > 0$$

qui se réduit aprés quelques calculs algébriques à

$$1 - 3x^2 = 0$$

i.e. $x = 1/\sqrt{3}$ et $x = -1/\sqrt{3}$ par symétrie.

2. *Désignons par $R(x)$ l'aire de la région bornée lorsque les coordonnées du point P sont (x, x^2). Nous avons vu dans la question précédente que Q est associé au paramètre $z(x) = -\frac{2x^2+1}{2x}$. Avec ceci, le périmètre est*

$$R(x) = \int_{z(x)}^{x} \sqrt{1+4t^2}dt + (x - z(x))\sqrt{1+(x+z(x))^2}$$

Quelques manipulations algébriques sur $R'(x)$ montrent que la (les) solution est racine du polynôme

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Un logiciel de calcul nous donne

$$x = \frac{\sqrt{7}}{3}\cos(Arcos(\sqrt{7}/14)/3) - \frac{1}{6} \simeq 0,62349..$$

et $-x$ par symétrie

Références