Histoire dans un corps

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

3 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Histoire dans un corps***

Soient $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ des éléments non nuls d'un corps $\mathbb{K}$. On remplace simultanément chacun de ces éléments par la somme des 50 autres. Soit $b_1, b_2, \dots, b_{51}$ la suite obtenue, si cette nouvelle suite est une permutation de l'originale que peut être la caractéristique de $\mathbb{K}$?

Solution : *Nous avons*

$$S := a_1 + a_2 + \cdots + a_{51}, \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_{51} = 50S$$

soit, pour toute permutation $b_1, b_2, \dots, b_{51}$ de $a_1, a_2, \dots, a_{51}$

$$50S = S \quad \textit{qui implique} \quad 49S = 0.$$

Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 7$ alors $49S = 0 \implies S = 0$ puis $b_i = -a_i$ pour tout $1 \leq i \leq 51$. D'un autre coté, il existe une permutation $\sigma \in S_{51}$ telle que $b_i = a_{\sigma(i)} = -a_i$. Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2, on peut alors construire une partition $\{a_i, a_{\sigma(i)}\}_1^{51}$ de la suite $a_1, a_2, \dots, a_{51}$, fait absurde puisque 51 est impair. La caractéristique de $\mathbb{K}$ vaut donc 2 ou 7.

Les valeurs 2 et 7 sont toutes les deux possibles : pour $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 7$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{51} = 1$ est un choix possible et pour le cas de 2, tout élément peut être choisi pour que $S = 0$ puisque $b_i = a_i = -a_i$.

Références