Topologie de la convergence simple : points adhérents et suites

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Topologie de la convergence simple : points adhérents et suites***

[1]

Soit $\mathscr{T}$ la topologie sur $\mathscr{C}([0,1])$ engendrée par le système de voisinages

$$V_{F,f,\varepsilon} = \{ g \in \mathscr{C}([0,1]) \ : \ |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in F \},$$

où F est une partie finie non vide dans $[0,1]$, $f \in \mathscr{C}([0,1])$, $\varepsilon > 0$ (c'est la topologie de la convergence simple sur $[0,1]$ i.e. engendrée par la famille de semi-normes $(p_x)_{x\in[0,1]}$ avec $p_x(f) = |f(x)|$). On considère alors le sous-ensemble de $\mathscr{C}([0,1])$ définit par

$$\mathscr{A} = \{ f \in \mathscr{C}([0,1]) \ : \ 0 \leq f(x) \leq 1 \text{ et } \lambda(x \in [0,1] \ : \ f(x) = 1) \geq 1/2 \}.$$

(λ est la mesure de Lebesgue) Montrer que la fonction identiquement nulle 0 est adhérente à $\mathscr{A}$ bien qu'il n'existe pas de suite $(f_n)_n \subset \mathscr{A}$ qui converge vers 0 dans $(\mathscr{C}([0,1]), \mathscr{T})$.

Solution : *Il est clair que $\lim_n f_n = f$ dans $(\mathscr{C}([0,1]), \mathscr{T})$ si et seulement si, $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[0,1]$. Pour montrer que la fonction nulle $f = 0 \in \overline{\mathscr{A}}$ il faut montrer que tout voisinage de f*

$$V_{F,\varepsilon} = \{ g \in \mathscr{C}([0,1]) \ : \ |g(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in F \},$$

rencontre $\mathscr{A}$ ce qui est évident car étant donnés $F \subset [0,1]$ fini et $\varepsilon > 0$, il est facile de construire une fonction $g \in \mathscr{C}([0,1])$ affine par morceaux qui soit nulle sur F et égale à 1 sur une reunion disjointe d'intervalles $I_1, \dots, I_p$ de longueur $1/2$.

Toutefois, s'il existais une suite $(f_n)_n$ dans $\mathscr{A}$ qui converge vers f alors elle convergerai simplement vers f sur $[0,1]$ et par convergence dominée (car $0 \leq f_n \leq 1$) on aurai

$$0 = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \lim_n f_n(t)dt = \lim_n \int_0^1 f_n(t)dt \geq 1/2$$

ce qui est absurde. CQFD

Références

[1] B.R.Gelbaum and J.M.Olmsted. Counterexamples in analysis. Dover, 2003.