Une permutation qui conserve les séries convergentes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une permutation qui conserve les séries convergentes***

[1] 1-2006.

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{S}$ *des suites* $\mathbf{a} = (a_n)_n$ *de nombres réels telles que la série* $\sum_0^\infty a_n$ *converge.*

Soit $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une permutation telle que pour tout* $\mathbf{a} = (a_k)_0^\infty \in \mathscr{S}$ *la série* $\sum_{k=0}^\infty a_{\pi(k)}$ *converge. On va montrer que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \forall\, \mathbf{a} \in \mathscr{S}.$$

1. *Montrer que* $\mathscr{S}$*, muni de la norme* $\|\mathbf{a}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \right\}$ *est un espace de Banach.*
2. *Montrer que les formes linéaires sur* $\mathscr{S}$ *ci-dessous sont continues*

$$\begin{aligned} U_n \quad &: \quad \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto U_n(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{n} a_k, \\ T_n \quad &: \quad \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto T_n(\mathbf{a}) = a_n, \\ T \quad &: \quad \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto T(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

3. *Montrer que l'application linéaire* $T_\pi \quad \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto T_\pi(\mathbf{a}) = (a_{\pi(k)})_k$ *est continue.*
4. *En déduire que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}, \quad \forall\, \mathbf{a} = (a_n) \in \mathscr{S}.$

Solution :

1. *On munit l'espace* $\mathscr{S}$ *des suites* $(a_k)_0^\infty$ *de nombres réels telles que la série* $\sum_k a_k$ *converge de la norme*

$$N(\mathbf{a}) = \sup_{n\geq 0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right|.$$

$(\mathscr{S}, N)$ est (classique) un espace de Banach.

2. *Les formes linéaires*

$$\begin{aligned} U_n &: \quad \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto U_n(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{n} a_k, \\ T_n &: \quad \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto T_n(\mathbf{a}) = a_n, \\ T &: \quad \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto T(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

sont continues. Les inégalités $|U_n(\mathbf{a})| \leq N(\mathbf{a})$ assurent la continuité des U_n, comme $T_0 = U_0$, $T_n = U_n - U_{n-1}, (n \geq 1)$ les formes T_n sont aussi continues ; enfin T est continue puisque par exemple $|T(\mathbf{a})| \leq 2N(\mathbf{a})$ (on peut aussi invoquer le théorème de Banach-Steinhaus puisque $T(\mathbf{a}) = \lim_n U_n(\mathbf{a}), \forall\, \mathbf{a} \in \mathscr{S}$).

3. *L'application linéaire $T_\pi \ : \ \mathscr{S} \ni \mathbf{a} \mapsto T_\pi(\mathbf{a}) = (a_{\pi(k)})_k$ est continue.*

Pour cela on applique le théorème du graphe fermé : soit $(\mathbf{a}^n)_n$ une suite convergente dans $\mathscr{S}$ de limite $\mathbf{a} = (a_k)_k$ telle que $\lim_n T_\pi(\mathbf{a}^n) = \mathbf{b} = (b_k)_k$ dans $\mathscr{S}$. Notons $\mathbf{a}^n = (a_k^n)_k$. Par continuité de U_k

$$\lim_n U_k(T_\pi(\mathbf{a}^n)) = U_k(\mathbf{b}) = b_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

mais

$$U_k(T_\pi(\mathbf{a}^n)) = a^n_{\pi(k)}, \ \text{ on a donc aussi } \lim_n U_k(T_\pi(\mathbf{a}^n)) = \lim_k a^n_{\pi(k)} = a_{\pi(k)}$$

puisque $\lim_n \mathbf{a}^n = \mathbf{a}$, finalement $b_k = a_{\pi(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, soit $T_\pi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$: T_π est bien continue.

4. *Vu ce qui précède $T \circ T_\pi - T$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{S}$ avec $(T \circ T_\pi - T)(\mathbf{a}) = \sum_k a_{\pi(k)} - \sum_k a_k$. Il ne reste plus qu'à remarquer que pour toute suite $\mathbf{a} \in \mathscr{S}$ nulle à partir d'un certain rang $(T \circ T_\pi - T)(\mathbf{a}) = 0$ et comme l'ensemble de ces suites est dense dans $\mathscr{S}$ par continuité $T \circ T_\pi - T \equiv 0$ i.e.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \forall\, \mathbf{a} \in \mathscr{S}.$$

C.Q.F.D.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.