Encore une application du théorème du graphe fermé

Patrice Lassere[1]

[1], ,

10 novembre 2022

Exercice 0.1 ★ ***Encore une application du théorème du graphe fermé***

Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions dans* $\mathscr{C}^1([0,1])$ *telle que*

⇝ $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $[0,1]$.

⇝ $(f'_n)_n$ *ne converge pas uniformément vers* 0 *sur* $[0,1]$.

Montrer qu'il existe une fonction $g \notin \mathscr{C}^1([0,1])$ *qui est limite uniforme de combinaisons linéaire (finies..) des* f_n.

Solution : *On équipe* $\mathscr{C}^0([0,1])$ *de la norme « sup » , c'est un espace de Banach. Soit* X *l'adhérence de* $\mathrm{vect}\{\mathrm{f_n},\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ *dans* $\mathscr{C}^0([0,1])$. *On suppose par l'absurde que* $X \subset \mathscr{C}^1([0,1])$ *; par un théorème de Weierstrass de L2, le graphe de l'opérateur de dérivation entre les espaces de Banach* X *et* $\mathscr{C}^0([0,1])$ *est fermé : il est donc continu par le théorème du graphe fermé. Mais dans ce cas* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $[0,1]$ *implique que* $(f'_n)_n$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $[0,1]$ *ce qui est contraire à l'hypothèse.*

Références