Séparabilité de $l^p(\mathbb{N}),\ 1 \leq p \leq \infty$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Séparabilité de*** $l^p(\mathbb{N}),\ 1 \leq p \leq \infty$

Montrer que

1. $l^p(\mathbb{N})$ *est séparable pour* $1 \leq p < \infty$.
2. $l^\infty(\mathbb{N})$ *n'est pas séparable.*

Solution :

Posons pour tout $j \in \mathbb{N}$: $E_j := (\delta_i^j)_j \in l^p(\mathbb{N})$ *(où* δ_i^j *est le symbôle de Kronecker). Soit* $X = (x_i)_i \in l^p(\mathbb{N})$, *alors puisque* $p < \infty$ *on a*

$$\|X - \sum_{i=0}^{n} x_i E_i\|_p = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

comme reste d'une série convergente. La famille $(E_j)_j$ *est donc totale dans* $l^p(\mathbb{N})$ *qui est donc bien (considérer comme toujours* $\mathrm{vect}_{\mathbb{Q}}\{\mathrm{E_j,\ j_inN}\}$*) séparable.*

Montrons par l'absurde[1] *que* $l^\infty(\mathbb{N})$ *n'est pas séparable, supposons donc qu'il existe dans* $l^\infty(\mathbb{N})$ *une suite dense* $(X_n)_n$. *Soient* $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\chi_A\ :\ \mathbb{N} \to \{0,1\}$ *la fonction indicatrice de* A *et* $E_A := (\chi_A(i))_i \in l^\infty(\mathbb{N})$. *Par densité de* $(X_n)_n$ *dans* $l^\infty(\mathbb{N})$ *il existe* $n = n(A) \in \mathbb{N}$ *tel que* $\|X_n - E_A\|_\infty < 1/2$ *et désignons par* n_A *le plus petit entier vérifiant cette propriété. Nous venons de construire une application* $\phi\ :\ \mathscr{P}(\mathbb{N}) \ni A \mapsto \phi(A) = n_A$ *et cette application est injective car si* $n = n_A = n_B$

$$(\,\|E_n - E_A\|_\infty < 1/2 \quad \& \quad \|E_n - E_A\|_\infty < 1/2) \Longrightarrow (\|E_A - E_B\|_\infty < 1)$$

qui implique immédiatement $E_A = E_B$ *soit* $\phi(A) = n_A = n_B = \phi(B)$: ϕ *est bien injective. En résumé, la séparabilité de* $l^\infty(\mathbb{N})$ *permet de construire une injection de* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ *dans* $\mathbb{N}$ *ce qui est absurde (Bernstein), d'où le résultat.*

Références