Séparabilité de $L^p(\Omega),\ 1 \leq p \leq \infty$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

12 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Séparabilité de*** $L^p(\Omega),\ 1 \leq p \leq \infty$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Montrer que

1. $L^p(\Omega)$ *est séparable pour* $1 \leq p < \infty$.
2. $L^\infty(\Omega)$ *n'est pas séparable.*

Solution :

Désignons par $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la famille (dénombrable) de tous les pavés ouverts de Ω de la forme $Q =]a_1, b_1[\times \ldots]a_n, b_n[\subset \Omega$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ et soit $\mathscr{E}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par la famille des fonctions indicatrices $(\chi_{Q_i})_i$. $\mathscr{E}$ est une partie dénombrable de $L^p(\Omega)$ et on va montrer que $\mathscr{E}$ est dense $L^p(\Omega)$.

Soit $f \in L^p(\Omega)$. L'espace $\mathscr{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω est notoirement dense dans $L^p(\Omega)$ ([?], ???) ; étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $g_\varepsilon \in \mathscr{C}_c(\Omega)$ vérifiant $\|f - g_\varepsilon\|_{L^p} \leq \varepsilon$. Considérons maintenant un ouvert borné Ω' vérifiant $\mathrm{supp(g)} \subset \Omega' \subset \Omega$. Il n'est alors pas difficile de construire une application $h \in \mathscr{C}_c(\Omega)$ vérifiant $\mathrm{supp(h)} \subset \Omega'$ et $|h(x) - g(x)| \leq \varepsilon/\lambda(\Omega)^{1/p},\ \forall\, x \in \Omega'$ (utiliser la continuité uniforme de g pour recouvrir le support de g par un nombre fini de pavés sur lesquels l'oscillation de g est $| \leq \varepsilon/\lambda(\Omega)^{1/p}$...). Avec ce choix $\|g - h\|_{L^p} \leq \varepsilon$ et finalement $\|g - h\|_{L^p} \leq \varepsilon$.

Soient $a \in \Omega$, $0 < r_a < \mathrm{dist(a, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)},\ \mathrm{f_a = \chi_{B(a,r_a)}}$ et enfin la boule ouverte $\mathscr{O}_a = \{f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)\ :\ \|f - f_a\| < 1/2\}$. La famille $(\mathscr{O}_a)_{a\in\Omega}$ est une famille non dénombrable d'ouverts non vides de $L^\infty(\Omega)$ deux à deux disjoints : en effet sinon, considérons $a \neq b$ deux points de Ω, et, sans perdre de généralité $x \in B(a, r_a) \setminus B(b, r_b)$ $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset B(a, r_a) \setminus B(b, r_b)$; supposons qu'il existe $f \in \mathscr{O}_a \cap \mathscr{O}_b$ alors

$$\begin{aligned} -1/2 < f(y) - \chi_{B(a,r_a)}(y) < 1/2 &\quad \textit{presque partout sur } B(x,r) \\ -1/2 < f(y) - \chi_{B(b,r_b)}(y) < 1/2 &\quad \textit{presque partout sur } B(x,r), \end{aligned}$$

il existe donc $c \in B(x, r)$ tel que

$$-1/2 < f(c) - \chi_{B(a,r_a)}(c) < 1/2 \quad \textit{et} \quad -1/2 < f(c) - \chi_{B(a,r_a)}(c) < 1/2$$

soit $1/2 < f(c) < 3/2$ et $0 < f(c) < 1/2$ ce qui est absurde. Nous avons construit une suite non dénombrable d'ouverts deux à deux disjoints dans $L^\infty(\Omega)$, il en résulte immédiatement que

$L^\infty(\Omega)$ ne peut être dénombrable (sinon, considérer une suite $(f_n)_n$ dense dans $L^\infty(\Omega)$ et à tout $a \in \Omega$ associer l'entier $n(a) \in \mathbb{N}$ défini comme le plus petit tel que $f_{n(a)} \in \mathscr{O}_a$ par densité de $(f_n)_n$ l'application $\Omega \ni a \mapsto n(a) \in \mathbb{N}$ est bien définie et les ouverts $\mathscr{O}_a$ étant deux à deux disjoints, cette correspondance est bijective d'où la contradiction).

Références