

Pourquoi la topologie produit ?

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Pourquoi la topologie produit ?

Soient $X_a, (a \in A)$ (A de cardinal infini) des espaces topologiques. Sur l'ensemble produit $\prod_{a \in A} X_a$, on considère la topologie $\mathcal{T}$ engendrée par les ensembles de la forme $\prod_{a \in A} U_a$ où U_a est un ouvert de X_a .

1. Montrer que dans $(\prod_{a \in A} X_a, \mathcal{T})$ un produit de connexes n'est plus forcément connexe.
2. Montrer que dans $(\prod_{a \in A} X_a, \mathcal{T})$ un produit de compacts n'est plus forcément compact.
3. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ étant muni de la topologie précédente, montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $f(x) = (x, x, \dots)$ n'est pas continue.
4. On suppose que tous les X_a sont des espaces métriques et soit X un autre espace métrique, Montrer qu'une fonction $f : X \rightarrow \prod_{a \in A} X_a$ est continue si, et seulement si chaque application coordonnée $f_a = \pi_a(f) : X \rightarrow X_a$ est continue et si tout $x \in X$ admet un voisinage sur lequel toutes les applications coordonnées sauf peut-être un nombre fini sont constantes.
5. Si de plus X est compact, montrer que f est continue si, et seulement si chaque application coordonnée $f_a = \pi_a(f) : X \rightarrow X_a$ est continue et si toutes les applications coordonnées sauf peut-être un nombre fini sont constantes.

Solution :

1. Munissons l'espace produit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles de cette topologie et considérons l'ensemble des suites bornées $L^{\infty}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite $(x_k)_k \in L^{\infty}(\mathbb{N})$ si, et seulement si, il existe un entier n tel que $(x_k)_k \in]-n, n[^{\mathbb{N}}$; soit

$$L^{\infty}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \geq 1}]-n, n[^{\mathbb{N}}.$$

$L^{\infty}(\mathbb{N})$ est donc ouvert dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme produit d'ouverts de $\mathbb{R}$. Mais on a aussi

$$(x_k)_k \in L^{\infty}(\mathbb{N}) \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : |x_k| \geq n,$$

soit encore

$$L^{\infty}(\mathbb{N}) = \bigcap_{n \geq 1} \prod_{k \geq 1} X_k^n := \bigcap_{n \geq 1} F_n$$

où

$$F_n = \prod_{k \geq 1} X_k^n \quad \text{avec} \quad X_k^n = \begin{cases} [n, +\infty[, & \text{si } k = n, \\ \mathbb{R}, & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Comme produit de fermés les ensembles F_k sont fermés et par suite $L^\infty(\mathbb{N}) = \bigcap_{n \geq 1} F_n$ est fermé comme intersection de fermés : c'est une partie non vide distincte de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ qui est à la fois ouverte et fermée, $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ n'est pas connexe bien qu'étant le produit des connexes $\mathbb{R}$.

2. Considérons maintenant le produit d'espaces compacts $[0, 1]^\mathbb{N}$ toujours bien entendu équipé de la topologie définie dans l'énoncé et montrons que $[0, 1]^\mathbb{N}$ n'est pas compact. Pour cela, nous allons construire un recouvrement ouvert de $[0, 1]^\mathbb{N}$ qui n'admet pas de sous-recouvrement fini : soient $A_0 = [0, 1[$, $A_1 =]0, 1]$. Ce sont deux ouverts de $[0, 1]$ et par conséquent les ensembles de la forme

$$\prod_{n \geq 1} A_{\varepsilon_n}, \quad \text{où} \quad (\varepsilon_n)_n \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$$

sont des ouverts de $[0, 1]^\mathbb{N}$ fournissant le recouvrement ouvert

$$[0, 1]^\mathbb{N} = \bigcup_{(\varepsilon_n)_n \in \{0, 1\}^\mathbb{N}} \prod_{n \geq 1} A_{\varepsilon_n}.$$

Toutefois, il est facile de vérifier qu'un tel recouvrement n'admet pas de sous-recouvrement fini, car si l'ensemble $\prod_{n \geq 1} A_{\varepsilon_n}$ est omis le point $(\varepsilon_n)_n \in [0, 1]^\mathbb{N}$ ne sera plus recouvert (car bien entendu ici $A = \mathbb{N}$ n'est pas de cardinal fini).

3. Soit $a \in \mathbb{R}$, l'image réciproque par f de l'ouvert $\prod_{n \geq 1}]-\frac{1}{n} + a, a + \frac{1}{n}[$ est

$$f^{-1} \left(\prod_{n \geq 1}]-\frac{1}{n} + a, a + \frac{1}{n}[\right) = \bigcap_{n \geq 1}]-\frac{1}{n} + a, a + \frac{1}{n}[= \{a\}$$

qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$: f est donc discontinue sur $\mathbb{R}$.

On peut tout de même remarquer que les applications coordonnées sont elles bien continues (tout le monde aura noté que la topologie produit $\mathcal{T}_P$ est incluse dans $\mathbb{T}$).

4. Supposons au contraire, qu'il existe une application continue $f : X \rightarrow \prod_{a \in A} X_a$ et un point $x \in X$ tels que pour une infinité d'indices $a \in A$ l'application coordonnée $f_a : X \rightarrow X_a$ soit non constante au point x . On peut alors construire dans A , une suite infinie d'indices $a_1, a_2, \dots$ et une suite de réels strictement positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ telles que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \exists x_i \in B_X(x, 1/i) \quad \text{tel que} \quad d_{X_{a_i}}(f_{a_i}(x_i), f_{a_i}(x)) > \varepsilon_i.$$

Il en résulte immédiatement que l'image réciproque par f du voisinage ouvert de $f(x)$

$$\left(\prod_{i \geq 1} B_{X_{a_i}}(f_{a_i}(x), \varepsilon_i) \right) \times \prod_{a \in A \setminus \{a_j, j \geq 1\}} X_a$$

ne contiendra aucune boule $B_X(x, 1/j)$, ($j \geq 1$), et ne peut par conséquent être un voisinage de x : f est donc discontinue au point x , d'où la contradiction.

Réciproquement, considérons un point $x \in X$ admettant un voisinage U_x sur lequel les applications coordonnées f_a , ($a \in A$) sont constantes sauf pour un nombre fini d'indices $a_1, \dots, a_n$. Soit $V = \prod_{a \in A} V_a \in \mathcal{T}$ un voisinage élémentaire de $f(x)$ alors

$$U := f_{a_1}^{-1}(V_{a_1}) \cap f_{a_2}^{-1}(V_{a_2}) \cap \dots \cap f_{a_n}^{-1}(V_{a_n}) \cap U_x$$

est un voisinage de x vérifiant $f(U) \subset V$: f est bien continue au point x (l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x).

5. C'est un corollaire immédiat de la question précédente.

Remarque : Sur l'espace produit $\prod_{a \in A} X_a$, la topologie produit $\mathcal{T}_P$ admet pour base les ouverts élémentaires de la forme $\prod_{a \in A} U_a$ où les U_a sont des ouverts de X_a et tous **sauf** peut être un nombre **fini** sont égaux à X_a . Cette définition cause souvent un certain malaise chez les étudiants qui ont tendance à la confondre avec $\mathcal{T}$ (en **dimension finie**, ces deux topologies bien entendu coïncident); l'exercice ci-dessus a pour objectif de leur montrer que $\mathcal{T}_P$ est la bonne topologie sur l'espace produit car il est bien connu ([?], page ??) que pour la topologie produit, un produit de connexe est connexe, un produit de compact est compact (théorème de Tychonov) et une application $f : X \rightarrow \prod_{a \in A} X_a$ est continue si, et seulement si chaque application coordonnée $f_a = \pi_a(f) : X \rightarrow X_a$ est continue ce qui n'est pas le cas pour $\mathcal{T}$. Moralité : **plus** vous avez d'ouverts **moins** vous avez de compacts, de connexes et de fonctions continues. Vu sa définition, la topologie produit est la topologie la plus économique (la moins fine ou initiale) i.e. possédant les moins d'ouverts, rendant continues les applications coordonnées $\pi_b : \prod_{a \in A} X_a \rightarrow X_b, (b \in A)$.

Références