Deux convexes disjoints non séparables par un hyperplan

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 $\bigstar$ ***Deux convexes disjoints non séparables par un hyperplan***

Dans $\mathbb{R}[x]$ on note $\mathscr{P}_+$ (resp. $\mathscr{P}_-$) l'ensemble des polynômes donc le coefficient du terme dominant est strictement positif (resp. strictement négatif). Montrer que $\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$ sont deux convexes disjoints qui ne peuvent être sépares par un hyperplan.

Solution : *$\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$ sont clairement convexes. Supposons qu'il existe un hyperplan $\mathscr{H} = \{\, P \in \mathbb{R}[x] \ : \ \Phi(P) = c\}$ où Φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[x]$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathscr{P}_+ \subset \{\, \Phi > c\}$ et $\mathscr{P}_- \subset \{\, \Phi < c\}$. On va montrer que $\Phi \equiv 0$ ce qui nous fournira la contradiction désirée.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme x^n, x^{n+1} et $x^{n+1} + tx^n$, $(t \in \mathbb{R})$ appartiennent à $\mathscr{P}_+$ nous avons

$$\Phi(x^{n+1}) > c,\ \Phi(x^n) > c$$

et

$$\Phi(tx^n + x^{n+1}) = \Phi(x^{n+1}) + t\Phi(x^n) > c, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Cette dernière égalité ne peut avoir lieu pour tout réel t (faire tendre t vers $-\infty$ si $c > 0$ et $+\infty$ sinon) qu'à la condition

$$\Phi(x^n) = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

et la forme Φ est bien identiquement nulle.

Références