Quelques exemples de suites faiblement convergente dans $L^2(\mathbb{R})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Quelques exemples de suites faiblement convergente dans*** $L^2(\mathbb{R})$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$g_n(x) = f(x-n), \quad h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right), \quad k_n(x) = f(x)e^{inx}.$$

Montrer que ces trois suites convergent faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.

Solution : ***Remarque liminaire :*** *Avec le théorème de représentation de Riesz $L^2(\mathbb{R})' \simeq L^2(\mathbb{R})$; donc à toute forme linéaire continue $T \in L^2(\mathbb{R})'$ est associée un (unique) élément $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $T(f) = \langle g, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt$. Ainisi, pour établir la faible convergence vers 0 d'une suite $(g_n)_n$ il faut démontrer que*

$$\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}) \ : \quad \int_{\mathbb{R}} g_n(t)\overline{g(t)}dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.(\star)$$

Soient $\varepsilon > 0$, $g \in L^2(\mathbb{R})$. Par densité[1] de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe $f_\varepsilon,\ g_\varepsilon \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\|f - f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon, \quad \|g - g_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} g_n(t)\overline{g(t)}dt\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(t-n)\overline{g(t)}dt\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)}\left(f(t-n) - f_\varepsilon(t-n)\right)dt\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} \left(\overline{g(t)} - \overline{g_\varepsilon(t)}\right) f_\varepsilon(t-n)dt\right| \\
&\qquad + \left|\int_{\mathbb{R}} \overline{g_\varepsilon(t)} f_\varepsilon(t-n)dt\right| \\
&\leq \|g\|_2 \cdot \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|g - g_\varepsilon\|_2 \cdot \|f_\varepsilon\|_2 + \left|\int_{\mathbb{R}} \overline{g_\varepsilon(t)} f_\varepsilon(t-n)dt\right|.
\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière inégalité, nous avons appliqué deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue pour l'égalité $\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t-n)|^2 dt = \|f_\varepsilon\|_2^2$.

Maintenant on peut choisir $n \in \mathbb{N}$ assez grand (disons $n \geq n_\varepsilon$) pour que l'intersection des supports de g_ε et $t \mapsto f_\varepsilon(t-n)$ soit vide (c'est classique : le support de g_ε est compact, donc inclu dans un intervalle $[a,b]$ et celui de f_ε dans un intervalle $[c,d]$; alors, celui de $t \mapsto f_\varepsilon(t-n)$ sera inclu dans $[c+n, d+n]$ et ne rencontrera pas $[a,b]$ pour n assez grand). Ainsi, pour $n \geq n_\varepsilon$ le dernier terme dans la dernière inégalité sera nul, i.e.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} g_n(t)\overline{g(t)}dt\right| &\leq \|g\|_2 \cdot \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|g - g_\varepsilon\|_2 \cdot \|f_\varepsilon\|_2 \\ &\leq \varepsilon\|g\|_2 + \varepsilon\|f_\varepsilon\|_2 \\ &\leq \varepsilon\|g\|_2 + \varepsilon(\varepsilon + \|f\|_2) := C \cdot \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon.\end{aligned}$$

Où dans la dernière inégalité on a utilisé l'inégalité $\|f_\varepsilon\|_2 \leq \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|f\|_2 \leq \varepsilon + \|f\|_2$. Les applications f, g étant arbitraires mais fixés, $\varepsilon > 0$ étant quelconque, $(\star)$ est vérifiée et la suite $(g_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.

Pour la seconde suite la procèdure est identique et inutile à détailler, le dernier terme dans l'inégalité tendant vers 0 avec n aprés un calcul direct :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \overline{g_\varepsilon(t)}\frac{1}{\sqrt{n}} f_\varepsilon\left(\frac{t}{n}\right) dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|f_\varepsilon\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |g_\varepsilon(t)|dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour la troisième, on se ramène à la première via la tranformée de Fourier qui est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle g, k_n \rangle = \langle \widehat{g}, \widehat{k_n} \rangle,$$

et la formule élémentaire

$$\widehat{k}_n(t) = \widehat{f}(t-n).$$

Références