Encore une preuve de $(l^\infty(\mathbb{N}))' \neq l^1(\mathbb{N})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

23 mars 2024

Exercice 0.1 ★ ***Encore une preuve de*** $(l^\infty(\mathbb{N}))' \neq l^1(\mathbb{N})$

1. *Démontrer l'existence d'une forme linéaire continue L sur $l^\infty(\mathbb{N})$ vérifiant*

$$\Big(u = (u_n)_n \in l^\infty(\mathbb{N}) \text{ et } \lim_n u_n = l \in \mathbb{R} \Big) \implies L(u) = l.$$

2. *En déduire que $(l^\infty(\mathbb{N}))' \neq l^1(\mathbb{N})$.*

Solution :

1. *Considérons le sous-espace $\mathscr{C}$ de $l^\infty(\mathbb{N})$ des suites convergentes. Sur $\mathscr{C}$, la forme linéaire L qui à $u = (u_n)_n \in \mathscr{C}$ associe $L(u) = \lim_n u_n$ est une forme linéaire continue (de norme 1). Par Hahn-Banach, on peut prolonger L en une forme linéaire continue de norme 1 sur $l^\infty(\mathbb{N})$, c'est la limite de Banach et ce prolongement répond à la question.*

2. *Supposons que $(l^\infty(\mathbb{N}))' = l^1(\mathbb{N})$ avec la question précédente, il existerai $\alpha = (\alpha_n)_n \in l^1(\mathbb{N})$ tel que*

$$L(u) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n u_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Mais en appliquant cette formule aux suite $\delta_k = (\delta_n^k)_n \in l^\infty(\mathbb{N})$ on obtient $\alpha_k = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, soit $L \equiv 0$ ce qui est absurde.

Références