

Encore une preuve de $(l^\infty(\mathbb{N}))' \neq l^1(\mathbb{N})$

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

18 avril 2024

Exercice 0.1 ★ **Encore une preuve de $(l^\infty(\mathbb{N}))' \neq l^1(\mathbb{N})$**

1. Démontrer l'existence d'une forme linéaire continue L sur $l^\infty(\mathbb{N})$ vérifiant

$$\left(u = (u_n)_n \in l^\infty(\mathbb{N}) \text{ et } \lim_n u_n = l \in \mathbb{R} \right) \implies L(u) = l.$$

2. En déduire que $(l^\infty(\mathbb{N}))' \neq l^1(\mathbb{N})$.

Solution :

1. Considérons le sous-espace $\mathcal{C}$ de $l^\infty(\mathbb{N})$ des suites convergentes. Sur $\mathcal{C}$, la forme linéaire L qui à $u = (u_n)_n \in \mathcal{C}$ associe $L(u) = \lim_n u_n$ est une forme linéaire continue (de norme 1). Par Hahn-Banach, on peut prolonger L en une forme linéaire continue de norme 1 sur $l^\infty(\mathbb{N})$, c'est la limite de Banach et ce prolongement répond à la question.
2. Supposons que $(l^\infty(\mathbb{N}))' = l^1(\mathbb{N})$ avec la question précédente, il existerait $\alpha = (\alpha_n)_n \in l^1(\mathbb{N})$ tel que

$$L(u) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n u_n, \quad \forall u \in l^\infty(\mathbb{N}).$$

Mais en appliquant cette formule aux suites $\delta_k = (\delta_n^k)_n \in l^\infty(\mathbb{N})$ on obtient $\alpha_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, soit $L \equiv 0$ ce qui est absurde.

Références