$(\|1_E - T\| < 1,\ T \in \mathscr{L}(E)) \Rightarrow (T \text{ inversible})$?

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ $(\|1_E - T\| < 1,\ T \in \mathscr{L}(E)) \Rightarrow (T$ **inversible**$)$ **?**

[1], 1984/9.

Soient $T\ :\ E \to E$ un opérateur continu sur un espace vectoriel normé E vérifiant $\|1_E - T\| < 1$.

1. *Si E est un espace de Hilbert (ou une algèbre de Banach), montrer que T est inversible.*
2. *Montrer que l'hypothèse de complétude sur E est essentielle.*

Solution :

1. *C'est tout à fait classique et la solution peut attendre...*
2. *Considèrons par exemple l'espace des polynômes $E = \mathbb{C}[X]$ muni du produit scalaire*

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\overline{Q(t)}dt, \quad P, Q \in \mathbb{C}[X],$$

et l'opérateur $T\ :\ \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ défini par

$$T(P) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) P(x), \quad P \in \mathbb{C}[X].$$

On a

$$((1-T)(P))(x) = \frac{x}{2}P(x),$$

de telle sorte que

$$\|(1-T)(P)\|^2 = \frac{1}{4}\int_0^1 t^2\,|P(t)|^2\,dt \leq \frac{1}{4}\int_0^1 |P(t)|^2\,dt = \frac{1}{4}\|P\|^2,$$

soit

$$\|1 - T\| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

D'un autre coté, T n'est pas inversible car par exemple, le polynôme constant $1 \notin \mathrm{im}(T)$.

: *Sur ce sujet, on pourra consulter* « Geometric series in incomplete normed algebras » , R.Fuster & A.Marquina [1], 1984/1.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.