Aux limites du théorème de Banach-Steinhaus

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Aux limites du théorème de Banach-Steinhaus***

Soit $E = c_{00}$ l'espace vectoriel des suites $x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ nulles a partir d'un certain rang et muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les applications linéaires $T_n \in \mathscr{L}(E)$ définies par*

$$T_n(x) = (0, x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n, 0, 0, \dots),$$

   sont continues.
2. *Montrer que pour tout $x \in c_{00}$ la suite $(T_n(x))_n$ est convergente dans E.*
3. *Montrer que la suite $(T_n)_n$ n'est pas uniformément bornée sur c_{00}.*
4. *Pourquoi néanmoins le théorème de Banach-Steinhaus n'est pas contredit ?*

Solution :

Références