Opérateur de dérivation

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Opérateur de dérivation***

[1], 1998/99.

Soit $D\ :\ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \mapsto D(f) = f'$*. Existe-t-il* $T \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}))$ *tel que* $T \circ T = T^2 = D$ *?*

Solution : *Si un tel* T *existe, alors*

$$\ker(T^2) = \ker(D),$$

mais $\ker(D)$ *est l'ensemble des fonctions constantes, il est donc de dimension* 1 *et par suite* $\dim\ker(T^2) = 1$ *et* T *n'est pas injectif, donc*

$$\{0\} \subsetneqq \ker(T) \subset \ker(T^2).$$

$\ker(T^2)$ *étant de dimension* 1*, la seule alternative est* $\ker(T) = \ker(T^2)$*, qui implique aussitôt*

$$\ker(T^p) = \ker(T),\ \forall p \in \mathbb{N}^\star$$

et en particulier

$$\ker(D^2) = \ker(T^4) = \ker(T^2) = \ker(D),$$

cependant

$$\ker(D^2) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})\ :\ f'' = 0\}$$

est l'ensemble des fonction affines, donc de dimension 2 *: tout ceci est donc absurde et un tel opérateur ne peut exister.*

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.