Forme faible du théorème de Müntz

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

28 mars 2024

Exercice 0.1 ★ ***Forme faible du théorème de Müntz***

[1]

Soit $(\lambda_n)_n$ une suite strictement croissante de réels positifs vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty, \\ \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1} = +\infty. \end{cases}$$

*On considère $E = \text{vect}\{x^{\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ le sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1])$, l'objectif est ici de montrer le **théorème de Müntz** : sous ces hypothèses, E est dense dans $\mathscr{C}^0([0,1])$ pour la topologie de la convergence uniforme sur $[0,1]$.*

Pour cela, à tout $m \in \mathbb{N}^\star$ distinct de tous les $\lambda_n,\ n \geq 1$ on associe la suite $(R_n)_n$ dans $\mathscr{C}^0([0,1])$ définie par :

$$\begin{cases} R_0(x) = x^m,\ x \in [0,1] \\ R_n(x) = (\lambda_n - m)x^{\lambda_n} \int_x^1 R_{n-1}(t) t^{-1-\lambda_n} dt, \quad n \geq 1,\ x \in [0,1]. \end{cases}$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(a_{n,k})_{k=0}^n$ de réels telle que*

$$R_n(x) = x^m - \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^{\lambda_k}, \quad x \in [0,1].$$

2. *Montrer que pour tout $n \geq 1$:*

$$\|R_n\|_\infty \leq \delta_n := \prod_{k=1}^n \left| 1 - \frac{m}{\lambda_k} \right|$$

3. *Montrer que la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^n a_{n,k} x^{\lambda_k}\right)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $e_m(x) = x^m$.*
4. *Conclure.*

Références

[1] J.E. Rombaldi. .... EDP sciences, 2004.