L'inclusion $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R})) \subset C_0(\mathbb{R})$ est stricte

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***L'inclusion*** $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R})) \subset C_0(\mathbb{R})$ ***est stricte***

Montrer que

$$\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R})) \subset C_0(\mathbb{R})$$

et que l'inclusion est stricte.

Où $C_0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et nulles à l'infini, $L^1(\mathbb{R})$ l'espace de Lebesgue des (classes) fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. $L^1(\mathbb{R})$ est muni de la topologie associée à la norme $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$ et $C_0(\mathbb{R})$ de celle associée à $\|f\|_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(t)|$, ces deux espaces sont des Banach.

Solution : *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, le Lemme de Riemman-Lebesgue[1] assure que la tranformée de Fourier est un opérateur linéaire continu injectif de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ (la continuité est immédiate par convergence dominée) i.e.*

$$\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R})) \subset C_0(\mathbb{R}).$$

Montrons que cette inclusion est stricte, (on peut aussi utiliser le théorème de l'application ouverte, nous le ferons peut être plus tard). Exhibons un élément de $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R})) \setminus C_0(\mathbb{R})$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, la clef est de remarquer que si $\mathscr{F}(f)$ est impaire il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \int_1^b \frac{\mathscr{F}(f)(t)}{t} dt \right| \leq C, \quad \forall\, 1 < b < \infty.$$

ceci résulte des deux faits élémentaires suivants :

$$\exists C > 0 \ : \ \left| \int_\alpha^\beta \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq C, \quad \forall\, \alpha < \beta$$

$$\mathscr{F}(f)(x) = -i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt) dt.$$

et du théorème de Fubini.

Ainsi, pour exhiber un élément $g \in C_0(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ il suffit de construire une fonction impaire $g \in C_0(\mathbb{R})$ telle que $\int_1^b \frac{g(t)}{t} dt$ soit non borné lorsque b tends vers l'infini. Par exemple une fonction continue impaire égale à $1/\log(x)$ pour $x > 2$ convient.

Références