Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On donne les nombres complexes

$$z_1 = (\sqrt{6} + i\,\sqrt{2})\left(\frac{1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + i\,\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

1. *Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique $a + i\,b$.*
2. *Déterminer le module puis un argument de z_1, z_2 et $z_1 z_2$.*
3. *Déterminer le module puis un argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$, $Z' = z_2^6$. Écrire Z et Z' sous forme algébrique.*

Solution :

1. *Un calcul direct donne :* $z_1 = \boxed{i\sqrt{2}}$. *De plus :* $z_2 = \dfrac{-1 + i\,\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\left(-1 + i\,\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left|\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right|} = \boxed{1 + i\sqrt{3}}$.
2. *Il est alors clair que* $z_1 = \boxed{\sqrt{2}e^{i\pi/2}}$ *et que* $z_2 = 2\left(1/2 + \sqrt{3}/2i\right) = \boxed{2e^{i\pi/3}}$.
3. *Comme* $Z = z_1/z_2 = \sqrt{2}/2e^{i(\pi/2 - \pi/3)} = \sqrt{2}/2e^{i\pi/6}$, *il vient* $\boxed{|Z| = \sqrt{2}/2}$ *et* $\boxed{\arg(Z) = \pi/6 \ [2\pi]}$ *d'où* $\boxed{Z = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + i\right)}$. *De même,* $Z' = z_2^6 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^6 = 64e^{i2\pi} = \boxed{64}$.

Références