Un espace vectoriel topologique non localement convexe

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Un espace vectoriel topologique non localement convexe***

Pour $0 < p < 1$, on considère l'espace $L^p([0,1])$ des classes de fonctions mesurables $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty.$$

① *Montrer que $L^p([0,1])$ est un sous-espace vectoriel des classes de fonctions mesurables.*

On pose alors pour $f, g \in L^p([0,1])$ $d(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt$.

② *Montrer que d est une distance invariante par translation sur $L^p([0,1])$ et que cette distance définit une topologie d'e.v.t.*

③ *Soient $f \in L^p([0,1])$, $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$, des fonctions $f_1, \dots, f_n$ dans $L^p([0,1])$ telles que*

$$d(f_i, 0) \leq \varepsilon \quad \& \quad f = \frac{f_1 + \cdots + f_n}{n}.$$

④ *En déduire que le seul voisinage convexe de l'origine dans $L^p([0,1])$ est $L^p([0,1])$, que $L^p([0,1])' = \{0\}$ (dual topologique) ; et enfin que $L^p([0,1])$ n'est pas un espace vectoriel topologique localement convexe.*

Solution :

1. *&*
   item L'inégalité de Minkowsky $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ valable pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ si $p \in]0,1[$ nous assure que $L^p([0,1])$ est un sous-espace vectoriel et que d vérifie l'inégalité triangulaire. Les autres propriétés sont évidentes et $(L^p([0,1]), d)$ est un espace métrique. En raisonnant comme dans le cas $p \geq 1$ on peut même montrer qu'il est complet.

2. *Soit $f \in L^p([0,1])$ et $n \geq 1$, la continuité de $x \mapsto \int_0^x |f(t)|^p dt$ et le théorème des valeurs intermédiaires assurent l'existence d'une partition $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0,1]$ vérifiant*

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p dt = \frac{\delta(f)}{n}, \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$$

où $\delta(f) = \int_0^1 |f(t)|^p dt$. *Ainsi* $f_i := nf\chi_{[x_{i-1},x_i]} \in L^p([0,1])$ *et* $f = \frac{1}{n}(f_1 + \cdots + f_n)$. *De plus par construction* $\delta(f_i) = n^{p-1}\delta(f)$; *il suffit alors de choisir* n *assez grand pour que* $n^{p-1}\delta(f) \leq \varepsilon$.

3. *Soit* V *un voisinage convexe de l'origine dans* $L^p([0,1])$. *Il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $B(0,\varepsilon) \subset V$. *Soit* $f \in L^p([0,1])$, *vu la question précédente, il existe* $f_1, \dots, f_n \in L^p([0,1])$ *vérifiant* $\delta(f_i) < \varepsilon$ *i.e.* $f_i \in B(0,\varepsilon) \subset V$ *et finalement* $f \in V$ *puisque* V *est convexe.* $L^p([0,1])$ *est donc le seul voisinage convexe de l'origine.* $L^p([0,1])$ *est bien le seul voisinage convexe de l'origine, ce n'est n'est donc pas un espace de Fréchet. Soit* $\varphi \in L^p([0,1])'$ *et* $\mathscr{B}$ *une base de voisinages convexes de* $0_{\mathbb{K}}$, $\forall B \in \mathscr{B} \ : \ \varphi^{-1}(B)$ *est un voisinage ouvert convexe de l'origine dans* $L^p([0,1])$ *i.e.* $\varphi^{-1}(B) = L^p([0,1])$ *soit* $\forall B \in \mathscr{B} \ : \ \varphi(L^p([0,1])) \subset B \implies \varphi \equiv 0$, *soit* $L^p([0,1])' = \{0\}$. *(remarquer que le même raisonnement vaut pour* $\mathscr{L}_c(L^p([0,1]), E)$ *où* E *est un evtlc...).*

Références