Une bijection linéaire continue dont l'application réciproque est discontinue

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une bijection linéaire continue dont l'application réciproque est discontinue***

[1]

On munit l'espace $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ des fonctions entières de la norme

$$\|f\| = \sup_{|z|=1} |f(z)|, \quad f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}).$$

Considérons l'opérateur $L : \mathscr{O}(\mathbb{C}) \to \mathscr{O}(\mathbb{C})$ définit par $L(f)(z) = f(z/2)$.

1. *Montrer que L est une bijection et vérifie $\|L(f) - L(g)\| \leq \|f - g\|, \quad \forall\, f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$.*
2. *Pour $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ on pose $f_n(z) = f(z) + \left(\frac{z}{2}\right)^n$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ puis, que L^{-1} est discontinue au point f.*
3. *$(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ est-il un espace de Banach ? Donner une preuve directe de ce résultat.*

Solution : *Toute fonction entière $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ se développe en série entière sur tout le plan complexe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{donc} \quad L(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} z^n, \quad z_i n \mathbb{C},$$

et l'unicité d'un tel développement assure l'injectivité de l'opérateur L. En outre, pour $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ on a $L(g) = f$ où $g(z) = f(2z)$: L est donc un isomorphisme algèbrique de $\mathscr{O}(\mathbb{C})$.

Pour $f = \sum_n a_n z^n, g = \sum_n b_n z^n \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\|L(f) - L(g)\| &= \sup_{|z|=1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} z^n \right| \\
&= \sup_{|z|=1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \left(\frac{z}{2}\right)^n \right| \\
&\leq \sup_{|z|=1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n \right| \\
&= \|f - g\|.
\end{aligned}$$

où la première inégalité est justifiée par le principe du maximum. L est bien continue sur $\mathscr{O}(\mathbb{C})$.

$$\|f - f_n\| = \sup_{|z|=1} \left|\frac{z}{2}\right|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Mais

$$\|L^{-1}(f) - L^{-1}(f_n)\| = \sup_{|z|=1} \left|\frac{2z}{2}\right|^n = 1$$

et par suite L^{-1} est discontinue au point f donc en tout point de $\mathscr{O}(\mathbb{C})$.

On peut d'ailleurs vérifier directement que $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ n'est pas complet en considérant la suite de fonctions entières de terme général $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z}{2}\right)^k$: pour tout $n, p \in \mathbb{N}$

$$\|f_{n+p} - f_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k} \leq \sum_{k\geq n+1} 2^{-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est donc une suite de Cauchy dans $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$. Si elle converge vers f dans $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$, alors, vu le choix de la norme, elle sera simplement convergente sur le cercle unité vers f, i.e.

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k = \frac{2}{2-z}, \quad \forall\, |z| = 1.$$

f serait alors une fonction entière égale (encore les zéros isolés) à la fonction holomorphe $f(z) = \frac{2}{2-z}$ sur le disque $D(0,2)$: tout ceci est absurde et $(\mathscr{O}(\mathbb{C}), \|.\|)$ n'est pas un espace de Banach.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.