Comportement au voisinage d'un point singulier essentiel isolé et non isolé

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ Comportement au voisinage d'un point singulier essentiel isolé et non isolé

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \setminus \{a\} \subset \mathbb{C}$.

1. On suppose le point a est isolé (i.e. que f est holomorphe sur un disque épointé $D(a, r) \setminus \{a\} \subset \Omega \setminus \{a\}$) et qu'il existe une suite $(r_n)_n \subset]0, r[$ décroissante vers 0 telle que f soit bornée sur chaque cercle $C(a, r_n)$. Montrer que f présente au point a une singularité virtuelle (i.e. sur prolonge holomorphiquement au point a).
2. Montrer que le résultat précédent tombe en défaut si le point a n'est plus isolé (au sens où f admet une suite de pôles $(a_n)_n \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ qui converge vers a .)

Solution :

1. Supposons¹ qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{|z-a|=r_n} |f(z)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En appliquant le principe du maximum à la fonction holomorphe f sur chaque couronne $C(0, r_n, r_{n+1}) := \{z \in \mathbb{C} : r_{n+1} < |z-a| < r_n\}$ on déduit immédiatement que

$$\sup_{0 < |z-a| < r_0} |f(z)| \leq M.$$

Il est alors classique que f présente au point a une singularité virtuelle.

2. Considérons une suite $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que la série $\sum_n |a_n|$ soit convergente et la fonction

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z-n}.$$

Soient $R > 0$, $z \in D(0, R)$. Si on laisse de cotés les premiers termes de la série dont le pôle est à l'intérieur du disque $D(0, R)$, les autres termes (disons pour $n \geq n_0$) seront holomorphes sur ce disque et, pour $|z| < R$, $n \geq n_0$

$$\left| \frac{a_n}{z-n} \right| \leq \frac{|a_n|}{n-|z|} < \frac{|a_n|}{n_0+1-R} = C|a_n|.$$

Cette inégalité assure la normale convergence et donc l'holomorphie de la série $\sum_{n>n_0} \frac{a_n}{z-n}$ sur $D(0, R)$. $R > 0$ étant arbitraire, f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ admettant pour pôles les entiers $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$, pour $z \in C(0, k + \frac{1}{2})$ on a

$$|z - n| \geq \left| |z| - n \right| = \left| k + \frac{1}{2} - n \right| \geq \frac{1}{2},$$

i.e.

$$\frac{1}{|z - n|} \leq 2, \quad \forall z \in C(0, k + \frac{1}{2}), \quad \text{et } n \in \mathbb{N}^*$$

et on a finalement

$$\max_{|z|=k+\frac{1}{2}} |f(z)| \leq 2 \sum_{n \geq 1} |a_n|, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

f est donc bornée sur les cercles $C(0, k + \frac{1}{2})$ et, en remplaçant z par $1/z$ on obtient une fonction méromorphe

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n z}{1 - nz}$$

admettant pour pôles les points $1/n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et l'origine comme point singulier essentiel. Toutefois, vu ce qui précède, son module reste borné sur les cercles de rayon $r_k = (k + \frac{1}{2})^{-1}$ ce qui nous fourni l'exemple désiré.

Remarque : Toutefois, malgré l'exemple ci-dessus, le comportement au voisinage d'un point singulier essentiel est des plus chaotique : f prends chaque valeur sauf peut être une, une infinité de fois, c'est le théorème² de Casorati-Weierstrass.

Références