Une fonction entière universelle

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une fonction entière universelle***

(C.Blair & L.A.Rubel, [1], 5-1983).

Montrer qu'il existe une fonction entière f telle que l'ensemble $\{f^{(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$ de toute les dérivées de f soit dense dans l'ensemble des fonctions entières $\mathscr{O}(\mathbb{C})$. Une telle fonction est dire « universelle » .

Solution : ***Rappel :*** La topologie usuelle sur $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ est la topologie de la convergence compacte. Il s'agit donc de montrer qu'il existe $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, tout $\varepsilon > 0$ et toute application $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, il existe un entier N tel que $\sup_{z\in K} |f^{(N)}(z) - g(z)| < \varepsilon$.

Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une énumération de tous les polynômes à coefficients rationnels. Soit I l'opérateur intégral définit sur $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ par

$$I(h)(z) = \int_0^z h(w)dw,$$

Les itérés $I \circ I \circ \cdots \circ I$ (k fois) seront notés I^k comme le veut la tradition. Notre fonction va être de la forme suivante :

$$f = \sum_{n\geq 1} I^{k_n}(P_n)$$

où la suite d'entiers $(k_n)_n$ vérifie les propriétés suivantes :

- ⇝ $k_n > k_j + \deg(P_j), \quad 1 \leq j \leq n-1.$
- ⇝ *En notant $H_n = I^{k_n}(P_n)$*

$$|H_n^{(j)}(z)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{pour } 0 \leq j \leq k_{n-1} \ \text{ et } \ |z| \leq n. (\star)$$

Si cela peut être fait, la série définissant f convergera uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ (avec la seconde propriété) et par conséquent $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$; toujours par $(\star)$ elle pourra être dérivée terme à termes. En outre, (encore $(\star)$) on aura

$$f^{(k_n)}(z) = P_n(z) + E_n(z), \quad \text{et} \quad |E_n(z)| \leq 2^{-(n-1)}, \quad \forall\, |z| \leq n.$$

Si tel est le cas, la fonction f possède bien les propriétés désirées : en effet, la suite des sommes partielles de la série série de Taylor de toute fonction entière $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ converge uniformément vers g sur tout compact de $\mathbb{C}$, comme sur tout compact tout polynôme est uniformément approchable *par des polynômes à coefficients rationnels, $\mathbb{Q}[z]$ est dense dans $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence compacte. Ainsi, pour $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ et K compact il existe $N \in \mathbb{N}$ suffisament grand pour que*

$$\sup_{z \in K} |f(z) - P_N(z)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad K \subset \{z \ : \ |z| \leq N\},$$

de telle sorte que

$$\sup_{z \in K} |f(z) - f^{(K_N)}(z)| \leq \sup_{z \in K} |f(z) - P_N(z)| + \sup_{|z| \leq N} |E_N(z)| \leq \varepsilon + 2^{-(N+1)}$$

d'où le résultat.

Pour achever la démonstration, il ne reste plus qu'à montrer que la suite $(K_n)_n$ peut être choisie vérifiant $(\star)$. Pour cela, si on remarque que $I(z^r) = z^{r+1}/(r+1)$ on a

$$\left|I^k(z^r)\right| = \left|\frac{z^{r+k}}{(r+1)\dots(r+k)}\right| \leq |z|^r \frac{|z|^k}{k!} \leq R^r \frac{R^k}{k!}, \quad \forall\, z \in \overline{D(0,R)}.$$

Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{N}$, la suite $(I^k(z^r))_k$ converge uniformément vers 0 sur tout disque $\{z \ : \ |z| \leq R\}$ (i.e. converge vers 0 dans $\mathscr{O}(\mathbb{C})$). Il en est de même pour $I^k(P_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ comme combinaison linéaire finie de $I^k(z^r)$ ainsi que de leur dérivées $\left(I^k(z^r)\right)^{(d)}$ par continuité de la dérivation dans $\mathscr{O}(\mathbb{C})$. Il est donc possible de choisir K_n assez grand pour que $(\star)$ soit réalisée.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.