Inégalité de convexité

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and Bernhard Keller[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3]Professeur, Université Paris Diderot, Paris

21 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Inégalité de convexité***

1. *Montrer que :*
$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$
2. *En déduire que :*
$$\forall n > 1, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Solution :

1. *Il suffit, pour montrer cette inégalité, d'étudier les variations de* θ : $\left\{\begin{array}{ccc}]-1,+\infty] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x)-x \end{array}\right.$.
2. *Soit* $n > 1$. *Appliquant l'inégalité précédente avec* $x = \frac{1}{n}$, *on a :* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ *ce qui amène :*
$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$ *et, la fonction exponentielle étant strictement croissante :* $e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqslant e$. *Par conséquent :* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$. *De même, comme* $n > 1$, $-\frac{1}{n} > -1$ *et on peut appliquer la première question avec* $x = -\frac{1}{n}$, *on obtient :* $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}$. *Multipliant les deux membres de cette inégalité par* $-n$, *on a :* $-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \geqslant 1$ *et donc, passant comme précédemment à l'exponentielle :* $e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Références