

Inégalité de convexité

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and Bernhard Keller³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³Professeur, Université Paris Diderot, Paris

14 octobre 2022

Exercice 0.1 ★★ Inégalité de convexité

1. Montrer que :

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$$

2. En déduire que :

$$\forall n > 1, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Solution :

1. Il suffit, pour montrer cette inégalité, d'étudier les variations de θ :

$$\begin{cases}]-1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(1+x) - x \end{cases} .$$

2. Soit $n > 1$. Appliquant l'inégalité précédente avec $x = \frac{1}{n}$, on a : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ ce qui amène :

$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$ et, la fonction exponentielle étant strictement croissante : $e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq e$.

Par conséquent : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$. De même, comme $n > 1$, $-\frac{1}{n} > -1$ et on peut appliquer la première question avec $x = -\frac{1}{n}$, on obtient : $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}$. Multipliant les deux membres de cette inégalité par $-n$, on a : $-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq 1$ et donc, passant comme précédemment à l'exponentielle : $e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Références