Une fonction entière non constante mais bornée sur toute droite passant par l'origine.

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

23 avril 2024

Exercice 0.1 ★ Une fonction entière non constante mais bornée sur toute droite passant par l'origine.

BAK & NEWMAN, C.ZUILY REF. ??

On pose pour $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{zt}}{t} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et y vérifie $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.
3. On désigne par $\log$ la fonction logarithme définie dans le demi-plan $U = \{z = x + iy : x + y > 0\}$ qui coïncide avec le logarithme usuel sur le demi-axe réel positif et par $w \mapsto w^w$ la fonction holomorphe sur U égale à $\exp(w \log(w))$. Soient enfin C_r et C_ε les quarts de cercles de rayon respectivement r et ε centrés à l'origine dans le premier quadrant. En intégrant la fonction $w \mapsto \frac{\exp(wz)}{w^w}$ sur le contour ci-contre, montrer que

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{\exp(itz)}{\exp(it \log(t) - t \frac{\pi}{2})} - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw.$$

4. Pour $z = x + iy$ avec $y = \frac{\pi}{2} + C$ où $C > 0$. Montrer que la première intégrale est majorée par C^{-1} et en déduire que $|f(z)| \leq C^{-1}$. Montrer que $|f(z)| \leq 1$ pour $|\operatorname{Im}(z)| \geq \pi$.
5. Soit $g(z) = f(z - 2i\pi)$. Montrer que g est bornée sur toute demi-droite issue de l'origine et holomorphe sur $\mathbb{C}$.
6. Montrer que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |g(x + 2i\pi)| = +\infty$.

Solution :

1. et
2. L'intégrale impropre définissant f est clairement convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ (l'intégrande se prolonge continuellement à l'origine et est un $o(t^{-2})$ à l'infini) : f est donc bien définie sur $\mathbb{C}$. Pour les mêmes raisons, on peut localement appliquer le théorème de continuité

et dérivation des intégrales à paramètres ([?], théorème 1.16.1) pour affirmer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (on peut aussi invoquer ce théorème pour montrer que f est continue sur $\mathbb{C}$ puis conclure avec celui de Moréra; ou enfin encore développer f en une série entière de rayon de convergence infini). La formule $f(z) = f(\bar{z})$ est elle immédiate.

3. Pour $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ posons $w^w = \exp(w \log(w))$ où $\log$ est la détermination principale du logarithme. La fonction $g : w \mapsto \frac{\exp(wz)}{w^w}$ étant holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, le théorème de Cauchy assure que pour tous $0 < \varepsilon < r$

$$\int_{C_{\varepsilon,r}} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw = 0$$

où $C_{\varepsilon,r}$ est le chemin indiqué dans la figure ci-dessous.

25025

Soit

$$\int_{C_{\varepsilon,r}} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw = \int_{[\varepsilon,r]} + \int_{C_r} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{[ir,i\varepsilon]} = 0, \quad \forall 0 < \varepsilon < r.$$

Bien évidemment

$$\int_{[\varepsilon,r]} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw = \int_\varepsilon^r \frac{\exp(tz)}{t^t} dt \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^r \frac{\exp(tz)}{t^t} dt = f(z)$$

et

$$\int_{[ir,i\varepsilon]} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw = - \int_\varepsilon^r \frac{e^{itz}}{\exp it(\log(t) + i\pi/2)} idt \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{itz}}{\exp it(\log(t) + i\pi/2)} idt.$$

Sur le contour C_ε nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\varepsilon} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\exp \{ \varepsilon (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(x + iy) \}}{\exp \{ \varepsilon (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\log(\varepsilon) + i\theta) \}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{\exp \{ \varepsilon (x \cos(\theta) - y \sin(\theta)) \}}{\exp \{ \varepsilon (\log(\varepsilon) \cos(\theta) - \theta \sin(\theta)) \}} \varepsilon d\theta \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \exp \{ \varepsilon \cos(\theta)(x - \log(\varepsilon)) \} \exp \{ \varepsilon \sin(\theta)(\theta - y) \} \varepsilon d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} g_{x,y}(\varepsilon, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} C_\varepsilon d\theta = \frac{C\pi\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

par continuité $(\varepsilon, \theta) \mapsto g_{x,y}(\varepsilon, \theta)$ sur le compact $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ (ou, au choix par convergence dominée); en conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw = 0$$

et finalement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_{\varepsilon,r}} g(w) dw = 0 = f(z) - \int_0^\infty \frac{e^{itz}}{\exp it(\log(t) + i\pi/2)} idt + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw$$

d'où la formule désirée

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{itz}}{\exp it(\log(t) + i\pi/2)} idt - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw. (\star)$$

4. Soit $z = x + iy = x + i(\pi/2 + C)$, ($C > 0$) un nombre complexe de partie imaginaire strictement plus grande que $\pi/2$. Le premier terme à droite dans $(\star)$ est majoré par C^{-1}

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \frac{e^{itz}}{\exp it(\log(t) + i\pi/2)} idt \right| &\leq \int_0^\infty |\exp(itz)| \exp(t\pi/2) dt \\ &\leq \int_0^\infty \exp\{-t(y - \pi/2)\} dt \\ &\leq \int_0^\infty \exp(-Ct) dt = \frac{1}{C}. \end{aligned}$$

Pour le second terme

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\exp\{r(\cos\theta + i\sin\theta)(x + i(\pi/2 + C))\}}{\exp\{r(\cos\theta + i\sin\theta)(\log r + i\theta)\}} ire^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/2} r \exp\{r \cos\theta(x - \log r)\} \exp\{r \sin\theta(\theta - C - \pi/2)\} d\theta \\ &\leq \int_0^{\pi/2} r \exp\{r \sin\theta(\theta - \pi/2 - C)\} d\theta \quad \text{dès que } \log r > x \\ &\leq \int_0^{\pi/2} r \exp\{-Cr \sin\theta\} d\theta \\ &\leq \int_0^{\pi/2} r \exp\left\{-\frac{2Cr\theta}{\pi}\right\} d\theta \quad \text{car } \sin(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi} \text{ sur } [0, \pi/2] \\ &\leq \frac{\pi}{2C} [1 - e^{-Cr}] \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2C}. \end{aligned}$$

On a donc pour $r > r_0$

$$\left| \int_{C_r} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw \right| \leq \frac{\pi}{C}.$$

Ces deux majorations assurent qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq C', \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } |\operatorname{im}(z)| > \pi/2. (\star')$$

f est en particulier bornée en dehors de la bande horizontale $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{im}(z)| \leq \pi\}$.

5. Vu ce qui précède, la fonction entière $g(z) = f(z - 2i\pi)$ est bornée en dehors de la bande horizontale $\{z \in \mathbb{C} : \pi \leq \operatorname{im}(z) \leq 3\pi\}$; l'intersection de toute droite complexe passant par l'origine avec cette bande étant compacte, g est bien bornée sur une telle droite et vérifie donc la propriété désirée.

6. On a pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} |g(x + 2i\pi)| &= |f(x)| = \int_0^\infty \frac{e^{xt}}{t^t} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{e^{xt}}{t^t} dt = \int_0^1 e^{t(x-\log(t))} dt \\ &\geq \int_0^1 e^{tx} dt = \left[\frac{e^{tx}}{x} \right]_0^1 = \frac{e^x - 1}{x} \end{aligned}$$

soit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |g(x + 2i\pi)| = +\infty.$$

Références